

Till Biskup

Nichtlineare Dynamik und Zeitreihenanalyse

Till Biskup

Nichtlineare Dynamik und Zeitreihenanalyse

1. Auflage

Nichtlineare Dynamik und Zeitreihenanalyse

Das Werk, einschließlich aller seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Autors unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

1. Auflage

© 2003, 2004 Till Biskup

Version 0.3.0

8. Juli 2004

gesetzt mit L^AT_EX 2_ε

unter Verwendung von MAKEINDEX, GlossT_EX und BIBT_EX

Formeln mit $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -L^AT_EX

Kontakt zum Autor:

email: till@till-biskup.de

Homepage: <http://www.till-biskup.de/>

Vorwort

Seit 1985 halte ich Vorlesungen zur Nichtlinearen Dynamik an den drei Berliner Universitäten. Oft wurde ich angesprochen, ob eine Skripte verfügbar ist oder welches Lehrbuch der Vorlesung äquivalent ist. Bisher konnte ich nur auf meine lose Blättersammlung handschriftlicher Aufzeichnungen verweisen oder ganze Listen guter Bücher anbieten, die verschiedene Aspekte der Vorlesung widerspiegeln (Berge, Glass, Chatfield, Ebeling,...).

Deshalb war ich sehr erfreut, als Herr Biskup mir diese Skripte zeigte. Ich war beeindruckt von der professionellen Qualität und finde, dass die wichtigsten Inhalte der Vorlesungen und Übungen außerordentlich gut dargestellt werden. Ich wünsche, dass diese Skripte viele Studierende anregt, sich intensiv mit Anwendungen der Nichtlinearen Dynamik in den Biowissenschaften auseinanderzusetzen.

Hanspeter Herzel

Vorbemerkungen

Das vorliegende Skript orientiert sich bin in die Details der Numerierung und Benennung der einzelnen Abschnitte an der Vorlesung “*Nichtlineare Dynamik und Zeitreihenanalyse*”, die von Prof. Hanspeter Herzel im Rahmen der Ausbildung im Nebenfach “Theoretische Biologie” im Hauptstudium Biologie an der Humboldt–Universität zu Berlin gehalten wird.

Im Zentrum des ersten Teils sowohl des Skriptes wie auch der Vorlesung steht die klassische Zeitreihenanalyse (*time series analysis*), da diese in den verschiedenen Fachgebieten meist zu kurz kommt. Als Motivation dient dabei die Frage: “Was tun mit komplizierten Zeitreihen, die ich in der Praxis gemessen habe?” Besondere Bedeutung kommt der Zeitreihenanalyse dort zu, wo Systeme nur schlecht verstanden sind.

Große Teile der Darstellung in diesem Kapitel stützen sich auf die Ausführungen von Chatfield (1982).

Der zweite Teil (ab Kapitel 3) ist der nichtlinearen Dynamik gewidmet. Zunächst werden die drei Grundbegriffe der nichtlinearen Dynamik (Phasenraum, Attraktor, Bifurkation) erläutert. Anschließend werden konkrete Anwendungen und Systeme kurz angesprochen. Den Höhepunkt der Vorlesung stellt die Behandlung des zweidimensionalen Bifurkationsdiagramms gekoppelter Oszillatoren (Arnold–Zungen, Teufelstreppe) dar.

Nach Möglichkeit wurde zu allen Fachbegriffen bei ihrer ersten Einführung das englische Pendant aufgeführt. Das erleichtert den Zugang zur (meist englischsprachigen) Originalliteratur.

Till Biskup
Berlin, im Oktober 2003

URL

Aktuelle Informationen und Links zu diesem Skript im Internet unter <http://www.till-biskup.de/nldyn/>

Link zum Skript

Hinweise zur Benutzung

Symbole im Skript

Der besseren Übersichtlichkeit und des schnellen Zugriffs auf die Informationen halber wurden drei Symbole im ganzen Skript immer wieder verwendet:

- ▲ **Begriffe, Regeln, Sätze** erscheinen mit einem kleinen vorangestellten Dreieck. Die weitere Beschreibung erscheint eingerückt und setzt sich damit deutlich vom umgebenden Text ab.
- **Beispiele** und praktische Anwendungen sind durch ein vorangestelltes Quadrat gekennzeichnet. Sie zeigen den Bezug zur Praxis auf und stammen häufig direkt aus der zur Vorlesung gehörenden Computerübung.
- Hinweise auf wichtige **Fehlerquellen**, Tips und Querverweise werden durch einen Pfeil kenntlich gemacht.

wichtige Begriffe

Außerdem wurden wichtige Begriffe auf dem äußeren Rand notiert, um ihr Auffinden im Kontext zu erleichtern.

Literaturempfehlungen

Die hier aufgeführten Werke entsprechen den von Prof. Herzel in der Vorlesung empfohlenen Büchern (mit *: in der ITB-Bibliothek). Teilweise sind sie nur sehr schwer zu bekommen. Darüber hinaus existiert im Internet eine Menge guten Materials, vornehmlich in englischer Sprache. Für weitere Informationen dazu siehe den Link zum Skript.

Kaplan D, Glass L* Understanding Nonlinear Dynamics

bestes Buch

Chatfield C* Analyse von Zeitreihen, Teubner 1982

idealer Einstieg zur Zeitreihenanalyse

vergriffen, aber in der NaWi-Bibliothek der HU Berlin vorhanden
inzwischen 6. engl. Auflage, 2003

Berge P, et al.* Order within Chaos, Wiley 1986

etwas höheres Niveau, etwa dem der Vorlesung entsprechend
vergriffen, *nicht* in den Bibliotheken der HU Berlin

Glass L, Mackey M* From Clocks to Chaos, Princeton 1988

Ebeling W, et al. Selbstorganisation in der Zeit, Berlin 1990

Schuster HG* Deterministisches Chaos, Weinheim 1994

Leven R, et al. Chaos in dissipativen Systemen, 1994

Press et al.* Numerical Recipes

*Sammlung von Programmen; kurz zusammengefaßtes Wissen; mit Daten-CD;
insbesondere für die Praxis gedacht.*

Eine lesenswerte Einführung zur nichtlinearen Dynamik inklusive deterministischem Chaos liefert der Gehrtsen (Vogel, 1997) in seinem letzten Kapitel (zumindest die 50. Auflage).

Inhaltsverzeichnis

0	Einführung	1
0.1	Was ist “deterministisches Chaos”?	1
0.2	Bernoulli–Abbildung	3
1	Klassische Zeitreihenanalyse	7
1.1	Die Zeitreihe — Gegenstand der Zeitreihenanalyse	8
1.1.1	Verteilung, Momente	8
1.1.2	Stationarität	10
1.2	Vorverarbeitung von Zeitreihen (Filter)	11
1.2.1	Trendelimination	11
1.2.2	Glättung	13
1.2.3	Filter in der Praxis	15
1.3	Autokorrelationsfunktion (AKF)	15
1.3.1	Herleitung der AKF	15
1.3.2	Auftragung der AKF: Das Korrelogramm	15
1.3.3	Bedeutung der AKF	17
1.4	Diskrete stochastische Prozesse	17
1.4.1	Reiner Zufall	18
1.4.2	Irrfahrt, Diffusion	19
1.4.3	Gleitmittelprozeß, MA(q)	20
1.4.4	Autoregressive Prozesse, AR(p)	21
1.5	Leistungsspektrum, $S(m)$	22
2	Fourier–Analyse	25
2.1	Numerische harmonische Analyse: Fourier–Analyse	25
2.2	Artefakte bei der Spektralschätzung	27
2.2.1	Randeffekte	27
2.2.2	Aliasing	30
3	Grundbegriffe dynamischer Systeme	31

3.1	Attraktoren bei fixierten Parametern	34
3.1.1	Klassifikation bekannter Attraktoren	35
3.1.2	Poincaré–Abbildung	36
3.2	Bifurkationen bei Parametervariationen (quasistatisch)	37
3.2.1	Heugabel–Bifurkation	38
3.2.2	Sattel–Knoten–Bifurkation	40
3.2.3	Hopf–Bifurkation	43
3.2.4	Beispiele komplizierterer Bifurkationen	44
4	Logistische Gleichung und Lorenz–Modell	45
4.1	Logistische Abbildung	45
4.2	Lorenz–Modell	46
5	Nichtlineare Dynamik des Herzens	49
5.1	Grundlagen	49
5.2	Nichtlineare Dynamik	51
6	Gekoppelte Oszillatoren	53
6.1	Phasenresponse–Kurve (PRC)	53
6.2	Standardmodell der Kreisabbildung	54
6.3	Torus und Kreisabbildung	56
6.4	Zweidimensionales Bifurkationsdiagramm	57
	Abbildungsverzeichnis	61
	Vokabelverzeichnis engl.–dt.	63
	Literaturverzeichnis	67
	Index	68

Kapitel 0

Einführung

Das **Konzept der Vorlesung** lautet: Was tun mit komplizierten Zeitreihen, die ich gemessen habe?

Zum Einstieg in die Thematik und zur Motivation soll zunächst der Begriff “deterministisches Chaos” definiert sowie die mit ihm zusammenhängenden Phänomene kurz betrachtet werden. Anschließend wird die Bernoulli–Abbildung (auch: Modulo–Abbildung) auf diese Phänomene hin untersucht.

0.1 Was ist “deterministisches Chaos”?

▲ **Deterministisches Chaos** Als deterministisches Chaos bezeichnet man eine aperiodische beschränkte Dynamik in einem deterministischen System mit empfindlicher Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. *deterministisches Chaos*

Jeder dieser Begriffe hat eine spezielle Bedeutung und soll im Folgenden näher betrachtet werden (vgl. Kaplan und Glass, 1995):

aperiodisch *nichtperiodisch, aperiodic*, derselbe Zustand wird niemals zweimal erreicht.

beschränkt *bounded*, der Zustand bleibt bei sukzessiver Iteration innerhalb eines endlichen Bereiches und erreicht nicht $\pm\infty$.

deterministisch *deterministic* Es existiert eine Vorschrift (*rule*) ohne Zufallsterme, die die Dynamik vollständig beschreibt.

empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängig *sensitive dependence on initial conditions* Zwei anfänglich benachbarte Punkte driften mit zunehmender Zeit exponentiell auseinander. Das ist eine **grundlegende Eigenschaft des Chaos**: Sie führt direkt zur begrenzten Vorhersagbarkeit des Systems wegen der Unmöglichkeit, die Anfangsbedingungen mit beliebiger Genauigkeit zu kennen. Sie ist unter der Bezeichnung “**Schmetterlingseffekt**” populär geworden: Der Flügelschlag eines Schmetterlings kann prinzipiell einen Monat danach auf der anderen Seite der Erdkugel einen Sturm auslösen.

Empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen können auch lineare Systeme aufweisen, z.B. bei exponentiell divergierenden Trajektorien; ein

chaotisches System hat zusätzlich noch die Eigenschaft, daß seine Bewegung auf einen endlichen Phasenraum beschränkt bleibt. (Stöcker, 1998)

*fraktaler
Attraktor*

Eine weitere Eigenschaft des deterministischen Chaos sind **fraktale** oder “seltsame” **Attraktoren**. Sie haben eine nichtganzzahlige Dimension.

- ▲ **chaotischer Attraktor** Ein Attraktor, auf dem das System empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängig ist. Das System bewegt sich zwar in den Attraktor hinein, aber seine Bewegung auf dem Attraktor ist chaotisch. (Stöcker, 1998)

mathematische Definition von “Chaos”

Eine grundlegende Eigenschaft chaotischer Systeme ist die empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Mathematisch wird eine kleine Störung ε meist als

$$\varepsilon \propto \exp(\lambda_1 t) \quad (1)$$

mit dem Lyapunov-Exponenten λ beschrieben.

*Lyapunov-
Exponent*

- ▲ **Lyapunov-Exponent** *Lyapunov-Exponent*, λ , charakterisiert, wie schnell eine kleine Störung anwächst:

$$|f(x + \Delta x, t) - f(x, t)| = \Delta x e^{-\lambda t} \quad (2)$$

für hinreichend große Zeiten t und genügend kleine Abstände Δx . (Stöcker, 1998)

Die **mathematisch bedeutsame Eigenschaft von Chaos** ist, daß mindestens ein Lyapunov-Exponent positiv ist:

$$\lambda_1 > 0 \quad (3)$$

Damit unmittelbar verknüpft ist ein positiver Wert der Kolmogorov-Entropie (auch: metrische Entropie) K :

$$0 < K < \infty \quad (4)$$

*metrische
Entropie*

- ▲ **Kolmogorov-Entropie** *metrische Entropie*, *Kolmogorov-Sinai-Entropie* Die Summe aller positiven LE stellt ein fundamentales Maß für die Informationsproduktion eines Systems dar. Man bezeichnet dieses Maß als Kolmogorov- oder genauer metrische Entropie:

$$KE = \sum \lambda^+$$

(Kumpf, 1996)

Interpretation von λ_{\max}

Für den Fall, daß der maximale Lyapunov–Exponent λ_{\max} positiv ist, entspricht sein Kehrwert der mittleren Zeit, nach der sich eine Ungenauigkeit um den Faktor $e = 2,718\dots$ vergrößert hat. Je größer also λ_{\max} , desto größer ist die Sensibilität des Systems für kleine Störungen.

Gilt dagegen $\lambda_{\max} < 0$, dann entspricht der Kehrwert des Betrags des maximalen Lyapunov–Exponenten, $|\lambda_{\max}|^{-1}$, der mittleren Zeit, nach der die Abweichung vom Attraktor um e reduziert wurde. D.h., je größer $|\lambda_{\max}|$, desto schneller relaxiert das System zum Attraktor. (Markus, 1994)

0.2 Bernoulli–Abbildung

Empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen liegt vor, wenn eine sehr kleine Änderung in den Anfangsbedingungen nach hinreichend langer Zeit dazu führt, daß das System einen völlig anderen Zustand annimmt. Ein Beispiel dafür ist die Bernoullische Abbildung. Für eine Darstellung vgl. Abb. 1.

▲ **Bernoullische Abbildung** Eine iterative Abbildung nach der Vorschrift:

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n & \text{falls } x_n \text{ aus dem Intervall } [0; 0.5) \\ 2x_n - 1 & \text{falls } x_n \text{ aus dem Intervall } [0.5; 1] \end{cases} \quad (5)$$

Sie kann alternativ geschrieben werden als

$$x_{n+1} = 2x_n \pmod{1} \quad x_0 \in [0, 1] \quad (6)$$

und wird dann als **Modulo–Abbildung** bezeichnet. (Bronstein et al., 1999)

*Modulo–
Abbildung*

Die reellen Zahlen x_n liegen zwischen Null und Eins ($x_n \in [0, 1]$). Kennt man den Anfangswert x_0 nicht mit vollständiger Genauigkeit, so ist es nicht möglich vorauszusagen, ob ein Wert x_n in der oberen oder der unteren Hälfte des Intervalls liegt.

Schreibt man nämlich x_0 im Binärsystem, $x_0 = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$, mit binären Ziffern $b_i = 0$ oder 1 , so schiebt die Bernoullische Abbildung nur das Komma nach rechts, d.h. $x_1 = 0, b_2 b_3 b_4 \dots$ usw. Ist $b_2 = 0$, so liegt diese Zahl in der unteren Intervallhälfte. Eine irrationale Zahl hat in der Regel viele scheinbar zufällige Binärziffern b_i , so daß sich das System nur dann voraussagbar verhält, wenn man die Anfangsbedingung genügend genau kennt. (Stöcker, 1998)

Eigenschaften der Bernoulli–Abbildung

Gegeben sei die Modulo–Abbildung gemäß Gl. (6). Zunächst wollen wir uns ihr Verhalten für einen gegebenen rationalen Startwert ($x_0 = 0.63$) ansehen.

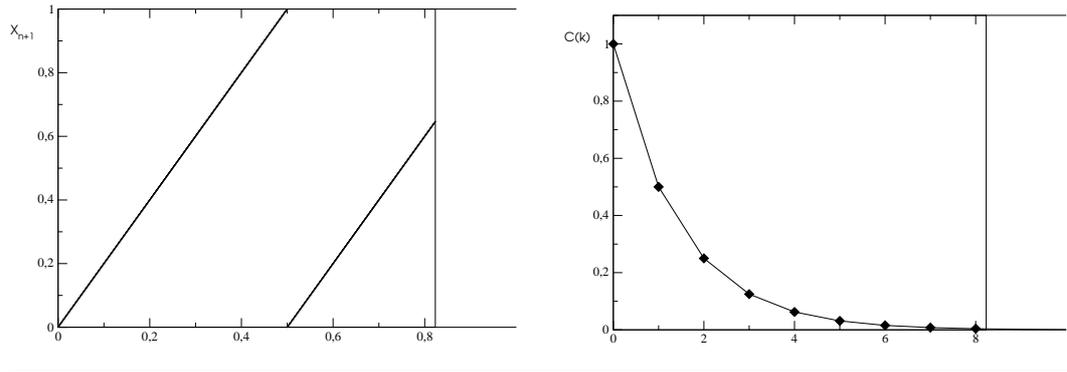


Abbildung 1: Bernoulli- oder Modulo-Abbildung: Phasenraumdarstellung (iterierte Abbildung) und Autokorrelationsfunktion (AKF). Stochastisch würde man die Modulo-Abbildung mit einem AR(1)-Prozeß beschreiben mit $\alpha = \frac{1}{2}$. Der mathematische Zusammenhang zwischen AKF und AR-Prozeß ist gegeben über die Identität zwischen den Koeffizienten k der AKF und den Paramtern α des AR-Prozesses.

Die resultierende Zeitreihe sieht wie folgt aus:

0.63 0.26 0.52 0.04 0.05 0.16 0.32 0.64 0.28
 0.56 0.12 0.24 0.48 0.96 0.92 0.84 0.68 0.16
 ...
 (Periode 12)

Deutlich erkennbar ist die Periode 12. Die ersten fünf Werte bis zum Erreichen der Periode repräsentieren das Einschwingverhalten und werden als Transiente bezeichnet. Ebenfalls lassen sich Phänomene wie **Nichtlinearität**

$$\begin{aligned} 0.48 &\rightarrow 0.96 \\ 0.52 &\rightarrow 0.04 \end{aligned}$$

und **Instabilität**

$$0.62 \quad 0.24 \quad 0.48 \quad \underline{0.96} \quad 0.92 \quad 0.84$$

beobachten. Der Fehler nach k Schritten, Δ_k , errechnet sich aus dem Anfangsfehler Δ_0 gemäß der Gleichung

$$\Delta_k = \Delta_0 \cdot 2^k = \Delta_0 \cdot \exp(\ln 2 \cdot k)$$

Dabei entspricht $\ln 2$ dem maximalen Lyapunov-Exponenten λ_1 und, da für die Modulo-Abbildung keine weiteren Lyapunov-Exponenten existieren, der Kolmogorov-Entropie K :

$$\ln 2 \equiv 1\text{bit} \equiv \lambda_1 \equiv K$$

Die praktische Nichtvorhersagbarkeit für lange Zeiten wird besonders deutlich, wenn wir zur Binärdarstellung übergehen:

Binärdarstellung

$$\begin{aligned} X_0 &= 0.0110111001? \\ X_1 &= 0.110111001? \\ X_2 &= 0.10111001? \\ X_3 &= 0.0111001? \end{aligned}$$

Deutlich ist hier zu sehen, daß mit jedem Zeitschritt der Rundungsfehler “?” größer und sehr schnell systembestimmend wird: Aufgrund mangelnder Genauigkeit der Kenntnis der Anfangsbedingungen ist deterministisches Chaos in der Praxis nicht für lange Zeiten vorhersagbar.

Für rationale Anfangsbedingungen $X_0 = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ ergibt sich eine periodische Folge in der Binärdarstellung und gleichzeitig ein periodisches Verhalten für die Folge $\{x_n\}$. Irrationale Anfangsbedingungen $x_0 \in [0, 1]$ führen dagegen zu nichtperiodischen Folgen $\{x_n\}$, die sich aus den dargestellten Gründen nicht vorhersagen lassen.

Zwar gibt es unendlich viele rationale Zahlen, aber trotzdem überwiegt die Zahl der irrationalen Zahlen bei weitem (es gibt überabzählbar unendlich viele irrationale Zahlen). Daher sind fast alle Anfangsbedingungen irrational und das Verhalten der Modulo–Abbildung chaotisch.

Fast alle Anfangsbedingungen ergeben also eine nichtperiodische, maximal komplexe Zeitreihe. Informationstheoretisch ausgedrückt: die Zahl bzw. Zeitreihe ist nicht komprimierbar.

- **Wichtiger Hinweis:** Jedes Computermodell kann *per definitionem* nur mit rationalen Zahlen arbeiten. Daher ist das chaotische Verhalten aufgrund irrationaler Anfangsbedingungen nur bedingt numerisch simulierbar.

Kapitel 1

Klassische Zeitreihenanalyse

Das höchste **Ziel** der klassischen Zeitreihenanalyse ist ein **Verständnis des Systems**. Dazu gehören Antworten auf Fragen wie:

- Ist das System linear oder nichtlinear?
- Wie ist die Zahl der Freiheitsgrade?

Dazu ist zu bemerken, daß sich lineare und nichtlineare Systeme sehr ähneln können. Bezüglich der Freiheitsgrade existiert ein Kontinuum von niedrig- zu hochdimensionalen Systemen.

Oft liefert die Zeitreihenanalyse aber auch ohne ein komplettes Verständnis der zugrundeliegenden Mechanismen wertvolle Hinweise für die Modellierung. Ist ein System im Computer modellierbar/reproduzierbar, und zwar so, daß damit prüfbare und gültige Vorhersagen getroffen werden können, dann ist davon auszugehen, daß das System verstanden ist (so der Standpunkt von Prof. H. Herzel).

Oft genügt es schon, ein System steuern und sein Verhalten bedingt vorhersagen zu können. Gerade im Anwendungsbereich ist die Steuerbarkeit wesentlich wichtiger als das Verständnis. Beispiele hierfür sind u.a. die Vorhersage des Wetters oder die Steuerung von Bioreaktoren.

Anwendungen Die Zeitreihenanalyse findet vielfältige Anwendung, so z.B. bei Wetter, Klima, Börse, Bioreaktoren oder in der Biomedizin. Anhand der Stimmuntersuchung soll ein mögliches Vorgehen mehr im Detail beschrieben werden. Grundsätzlich läßt sich die Untersuchung in drei Teile unterteilen: Screening, Diagnose und Therapie. Für die Stimmuntersuchung also z. B. die Untersuchung von Stimmen im Kaufhaus, bei Telefonaten etc. (Screening), die Untersuchung des Kehlkopfes selbst (Diagnose) und anschließend über die Theorie und das Verständnis der Zusammenhänge bis hin zu Möglichkeiten der Therapie.

Anwendungen

- Die Zeitreihenanalyse ist besonders wichtig bei nur teilweise verstandenen Systemen: Empirische Modelle werden oft auf Basis der Daten entwickelt.

Hier gibt es ein **Problem**: In der Physik wird im Studium Zeitreihenanalyse meist nicht behandelt, da die Systeme relativ einfach sind. Überall da, wo

Systeme nur schlecht verstanden sind, ist die Zeitreihenanalyse aber wichtig und notwendig. Das gilt im besonderen bei biologischen Systemen. Deshalb ist es gerade für Biologen von Interesse und Vorteil, sich mit der Thematik intensiver auseinanderzusetzen, auch wenn sie weniger ihrem angestammten Gebiet entspricht.

1.1 Die Zeitreihe — Gegenstand der Zeitreihenanalyse

Zeitreihe ▲ **Zeitreihe** Eine Zeitreihe $\{x_i\}$ ist eine Sammlung von Daten, die in zeitlicher Folge beobachtet wurden,

$$\{x_i\} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (1.1)$$

kontinuierlich Sie wird (zeit)*kontinuierlich* genannt, wenn die Beobachtungen kontinuierlich in der Zeit gemacht werden. Die Bezeichnung wird auch dann verwendet, wenn die gemessene Variable selbst nur diskrete Werte annehmen kann. Eine Zeitreihe wird dagegen als *diskret* bezeichnet, wenn die Beobachtungen nur zu bestimmten Zeitpunkten vorgenommen werden; gewöhnlich wählt man diese Zeitpunkte äquidistant. In diesem Fall ist die Frequenz der Messungen, Abtastrate oder Sampling-Frequenz f_s genannt:

Sampling-Frequenz

$$f_s = \frac{1}{\Delta t} \quad (1.2)$$

Ihr Kehrwert entspricht der Zahl der Einzelwerte (*samples*) einer Zeitreihe pro Zeiteinheit. Die Bezeichnung “diskret” wird auch für Zeitreihen verwendet, deren gemessene Variable kontinuierlich ist. (Chatfield, 1982)

Allgemeine Annahmen und Anforderungen, die in der Praxis an eine Zeitreihe gestellt werden, sind die **Äquidistanz** der Werte (ansonsten interpolieren: linear, kubische Splines), skalare Werte, möglichst 2–3 signifikante Stellen (→ Fehler nicht über 10%), hunderte Werte und viele “Oszillationen”.

Typische Werte für den Kehrwert der Abtastrate (Sampling-Frequenz, f_s) sind für Populationen oder das Klima $\Delta t = 1a$, in der Physiologie $\Delta t \approx s, \text{min}, h$, speziell für Hormone $\Delta t \approx h, d$ und in der Bioakustik $\Delta t = 0.05\text{ms} \hat{=} f_s = 20\text{kHz}$.

1.1.1 Verteilung, Momente

▲ **Momente** Momente sind Maßzahlen für die Beurteilung eindimensionaler Häufigkeitsverteilungen. *Gewöhnliche Momente* sind um den Bezugspunkt Null definiert, *zentrale Momente* um den Bezugspunkt des arithmetischen Mittels μ .

r-tes Moment Die allgemeine mathematische Definition des r -ten Momentes um den Bezugspunkt a lautet

$$m_r(a) = \frac{\sum (x_i - a)^r}{N} \quad (1.3)$$

entsprechend für das gewöhnliche r -te Moment

$$m_r(0) = \frac{\sum x_i^r}{N} \quad (1.4)$$

und für das zentrale r -te Moment

$$m_r(\mu) = \frac{\sum (x_i - \mu)^r}{N} \quad (1.5)$$

Spezialfälle, die im weiteren näher betrachtet werden sollen, sind das *arithmetisches Mittel* (das gewöhnliche erste Moment), die *Varianz* (das zentrale zweite Moment), die *Schiefe* (*skewness*, das zentrale dritte Moment) und die *Wölbung* (Exzeß, *kurtosis*, das zentrale vierte Moment).

- ▲ **Mittelwert** $\langle x_i \rangle$ Der Mittelwert $\langle x_i \rangle$ ist das gewöhnliche (Bezugspunkt $a = 0$) erste Moment.

Mittelwert

$$\begin{aligned} \langle x_i \rangle &= E(x_i) = \mu(x) = m_1(0) = \bar{x}_i \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \end{aligned} \quad (1.6)$$

- ▲ **Varianz** σ_x^2 Die Varianz $\text{Var}(x_i)$ gibt die mittlere quadratische Abweichung der Größe x_i an. Sie ist das zentrale (Bezugspunkt $a = \mu$) zweite Moment.

Varianz

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \text{Var}(x_i) = m_2(\mu) = D^2(x_i) \\ &= \langle (x_i - \langle x_i \rangle)^2 \rangle = \langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2 \\ &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} - \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} \right)^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

- Häufig wird statt der Varianz σ^2 die Standardabweichung σ angegeben. Die Standardabweichung ist dabei die Wurzel der Varianz. Beide sollten nicht verwechselt werden.

Standardabweichung

- ▲ **Schiefe** s Die Schiefe (*skewness*) mißt die Asymmetrie einer Verteilung. Sie gibt an, in welcher Richtung eine Häufigkeitsverteilung schief ist. Gleichzeitig liefert sie die Größenordnung dieser Schiefe. Die Schiefe ist definiert als das zentrale dritte Moment.

Schiefe

$$S = \frac{\langle (x_i - \langle x_i \rangle)^3 \rangle}{\sigma^3} = D^3(x_i) = m_3(\mu) \quad (1.8)$$

Bei $S < 0$ spricht man von einer linksschiefen Verteilung: große Abstände liegen links vom Mittelwert. Für positive Werte von S wird die Verteilung rechtsschief genannt: große Abstände liegen rechts vom Mittelwert.

Die Schiefe der Normalverteilung (oder jeder anderen perfekt symmetrischen Verteilung) ist $S = 0$.

Exzeß

- ▲ **Wölbung** Die Wölbung (Exzeß, *kurtosis*) gibt an, ob (bei gleicher Varianz) das absolute Maximum einer Häufigkeitsverteilung größer oder kleiner als bei der Dichte der Normalverteilung ist. Sie ist definiert als das vierte zentrale Moment:

$$k = \text{Kurt}[x] = D^4(x_i) = m_4(\mu) = \frac{\sum (x_i - \mu)^4}{N} \quad (1.9)$$

mit dem Mittelwert μ von x . Sie ist das klassische Maß für Nicht-Gaußheit (*nongaussianity*).

Hinweis: In mancher Definition wird ein Wert von -3 vom berechneten Wert abgezogen, so daß die Normalverteilung eine Wölbung von 0 hat. In diesem Fall gilt für $k < 0$, daß das Maximum der Häufigkeitsverteilung kleiner, für $k > 0$ größer als das der Normalverteilung ist.

- **Genereller Grundsatz:** Immer zuerst die *Rohdaten* und die *Histogramme* anschauen, um eventuelle Ausreißer von Anfang an zu identifizieren.

1.1.2 Stationarität

Ein wesentliches Konzept in der Zeitreihenanalyse ist die Stationarität. Ist eine Zeitreihe nicht stationär, dann kann keine Analyse dieser Daten durchgeführt werden. Es gibt allerdings Methoden, die die Instationarität einer Zeitreihe beseitigen können (Trendelimination).

Stationarität

- ▲ **Stationarität** Eine Zeitreihe ist stationär, wenn sich ihre statistischen Eigenschaften (Kurzzeitmittelwert, -Varianz, -Korrelationsfunktion, -Spektrum, ...) nicht mit der Zeit ändern. Man spricht in diesem Fall auch von einem **stationären Prozeß**.

Wir nennen eine Zeitreihen dann **stationär im mathematischen Sinne** oder streng stationär, wenn alle Momente zeitunabhängig sind. **Stationär im engeren Sinne** oder schwach stationär ist eine Zeitreihe hingegen dann, wenn nur die 1. und 2. Momente zeitunabhängig sind.

- Die Stationarität sollte nicht mit dem Konzept stationärer Punkte (Fixpunkte) verwechselt werden.

In der Praxis wirft die Stationarität dagegen eine **Reihe von Problemen** auf. Zunächst einmal ist die Stationarität über beliebig viele (nicht empirische) Daten definiert. Das ist empirisch nicht praktikabel. Die entscheidende Frage lautet: Wie ist bestimmbar, ob ein Prozeß stationär oder instationär ist? Die Momente dürfen schwanken, aber ab wieviel Schwankung müssen wir die Zeitreihe als instationär betrachten? Dazu kommt: Der Test auf Stationarität impliziert Annahmen über den Prozeß. D.h. wir müssen Vorwissen (Annahmen) über den Prozeß in die Beurteilung seiner Stationarität einfließen lassen.

Schließlich ist die Entscheidung über die Stationarität vom beobachteten Zeitfenster abhängig. Das alles führt zu dem Schluß:

- Die Entscheidung über die Stationarität eines Prozesses erfordert Pragmatismus. Wichtig dabei ist: Die Methoden der Zeitreihenanalyse sind nur bei näherungsweise stationären Daten anwendbar.

1.2 Vorverarbeitung von Zeitreihen (Filter)

Da die Stationarität einer Zeitreihe die grundlegende Voraussetzung für die Anwendung der Methoden der Zeitreihenanalyse ist, gibt es Verfahren, die aus einer instationären eine stationäre Zeitreihe machen. Diese Verfahren werden unter dem Oberbegriff **Filter** zusammengefaßt. Ihnen zugrunde liegt der Ansatz, daß eine instationäre Zeitreihe $x(t)$ aus folgenden Komponenten besteht:

Filter

$$x(t) = \text{Trend} + \text{periodische Komponenten} + \text{stationärer Prozeß}$$

Ein Beispiel für eine periodische Komponente ist ein Tages- oder Jahresgang. Ein Trend wäre z.B. der kontinuierliche Anstieg der globalen CO₂-Konzentration (trotz jährlicher periodischer Schwankungen).

Grundsätzlich gibt es unterschiedliche Ziele, die mit einer Filterung verfolgt werden können. Es ist wichtig, sich vorher darüber klar zu sein, was man mit einem Filter erreichen möchte. Filter können (a) zur Trendelimination, (b) zur Rauschreduzierung oder (c) zur Eliminierung der Periode eines Signals verwendet werden. Die Möglichkeiten (b) und (c) werden auch unter dem Oberbegriff "Glättung" zusammengefaßt.

1.2.1 Trendelimination

Von der Fourieranalyse kommend werden Filter, die der Trendelimination dienen, auch als **Hochpaßfilter** bezeichnet, da sie tiefe Frequenzen herausfiltern, hochfrequente Oszillationen aber nicht beeinflussen.

Hochpaß

Wir können drei verschiedene Arten von Hochpaßfiltern unterscheiden:

1. Differenzieren

Die einfache Differenz einer diskreten Zeitreihe (hier: rückwärtsgerichtete Differenz, *backward difference*)

$$y_i = x_i - x_{i-1} \tag{1.10}$$

entspricht der Ableitung für kontinuierliche Daten. Es sind aber auch kompliziertere Differenzen möglich, z.B.:

$$y_i = x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1} \tag{1.11}$$

Diese Differenz entspricht im Kontinuierlichen der Krümmung.

2. Subtraktion eines gleitenden Mittels/Gleitmittelwertes

Die allgemeine mathematische Definition für die Subtraktion eines (symmetrischen) gleitenden Mittels s_i oder Gleitmittelwertes (*running average*) von einer Zeitreihe x_i lautet:

$$y_i = x_i - s_i \quad \text{mit} \quad s_i = \frac{1}{2l+1} \sum_{j=-l}^l x_{i+j} \quad (1.12)$$

Konkret sieht also das symmetrische gleitende Mittel, das über fünf Werte von x_i mittelt, wie folgt aus:

$$s_i = \frac{x_{i+2} + x_{i+1} + x_i + x_{i-1} + x_{i-2}}{5}$$

3. Polynom-Fit

Es wird versucht, ein Polynom n -ten Grades an die Zeitreihe anzufitten. Die angepaßte Funktion (das Polynom) selbst liefert ein Maß für den Trend, die Residuen eine Schätzung für die örtlichen Fluktuationen.

Residuen

▲ **Residuen** Differenzen zwischen den beobachteten und den angepaßten Werten

■ **Trendelimination durch Differenzieren** Eine Zeitreihe mit linearem Trend wurde mehrmals numerisch differenziert. In Abb. 1.1 ist im linken Graph die ursprüngliche Zeitreihe mit linearem Trend und im rechten Graph zusätzlich noch die Zeitreihe nach einmaligem und zweimaligem Differenzieren zu sehen. Deutlich treten zwei Effekte des Differenzierens hervor: (i) Der Trend wird eliminiert und (ii) das Rauschen wird verstärkt. Letztgenannter Effekt wird besonders deutlich sichtbar bei einer Betrachtung der Standardabweichungen:

$$\begin{array}{ll} \sigma_x = 0.163196 & \sigma_x(D^3) = 0.445591 \\ \sigma_x(D) = 0.140207 & \sigma_x(D^4) = 0.834969 \\ \sigma_x(D^2) = 0.243570 & \sigma_x(D^5) = 1.586320 \end{array}$$

Die gegenüber der ursprünglichen Zeitreihe mit linearem Trend geringere Standardabweichung $\sigma_x(D)$ der Zeitreihe nach der ersten Differenzierung ist durch die Beseitigung des Trends bedingt.

Daß Differenzieren die Standardabweichung der Zeitreihe vergrößert, effektiv also das Rauschen verstärkt, läßt sich auch mathematisch beweisen.

Additivität der Varianz

Beweis. Es sei z_i eine normalverteilte Zufallszahl, $z_i \in \mathbb{N}(0, \sigma)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Var}(z_i - z_{i-1}) &= \langle (z_i - z_{i-1})^2 \rangle - (\langle z_i \rangle - \langle z_{i-1} \rangle)^2 \\ &= \underbrace{\langle z_i^2 \rangle}_{\sigma^2} - 2 \underbrace{\langle z_i z_{i-1} \rangle}_0 + \underbrace{\langle z_{i-1}^2 \rangle}_{\sigma^2} \\ &= 2\sigma^2 \end{aligned}$$

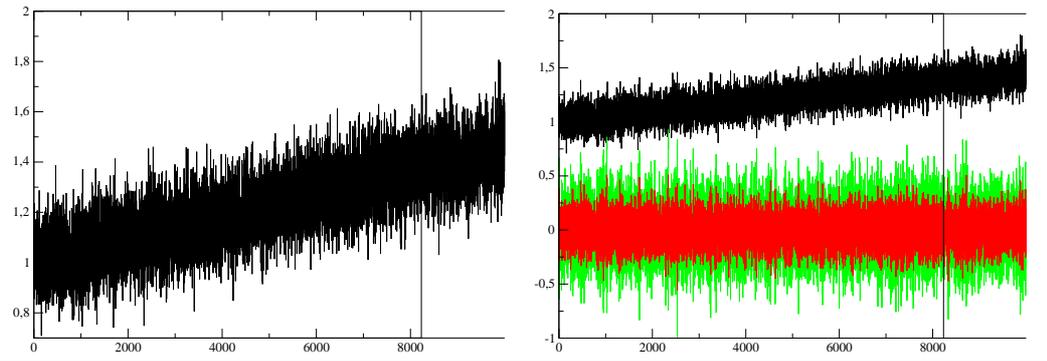


Abbildung 1.1: Trendelimination einer Zeitreihe mit linearem Trend. Der linke Graph stellt die Ausgangs-Zeitreihe dar, im rechten Graph sind zusätzlich noch die erste (rot) und zweite (grün) Differenz dargestellt. Deutlich zu sehen ist, daß das Differenzieren den Trend eliminiert, aber gleichzeitig das Rauschen verstärkt.

D.h. die Varianz hat sich durch die Differenzenbildung verdoppelt. □

- Bei unabhängigen Zufallszahlen verhalten sich Mittelwerte und Varianzen additiv.

1.2.2 Glättung

Analog zu den Hochpaßfiltern, die tieffrequente Signalanteile (Trends) entfernen, gibt es **Tiefpaßfilter**, die hochfrequente Signalanteile eliminieren und daher oft zur Rauschreduzierung angewandt werden. Auch hier können wir zwei verschiedene Filter unterscheiden:

Tiefpaß

1. Gleitmittelwert (*running average*)

Im Gegensatz zur Subtraktion eines gleitenden Mittels beim Tiefpaßfilter (Trendelimination, vorheriger Abschnitt) wird die neue Zeitreihe y_i beim *running average*-Filter aus dem gleitenden Mittel direkt generiert:

$$y_i = \frac{1}{2l + 1} \sum_{j=-l}^l x_{i+j} \quad (1.13)$$

2. gewichtete Filter

Gewichtete Filter sind die Erweiterung der einfachen *running average*-Filter (oder letztere der Spezialfall gewichteter Filter mit dem Gewicht $\beta = \frac{1}{2l+1}$). Mathematisch werden sie wie folgt definiert:

$$y_i = \sum_{j=-l}^l \beta_j x_{i+j} \quad \text{mit} \quad \sum_j \beta_j = 1 \quad (1.14)$$

Ein häufig verwendetes Beispiel ist das Dreiecksfilter:

$$y_i = \frac{1}{4}x_{i-1} + \frac{1}{2}x_i + \frac{1}{4}x_{i+1} \quad \text{mit} \quad \{\beta_i\} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

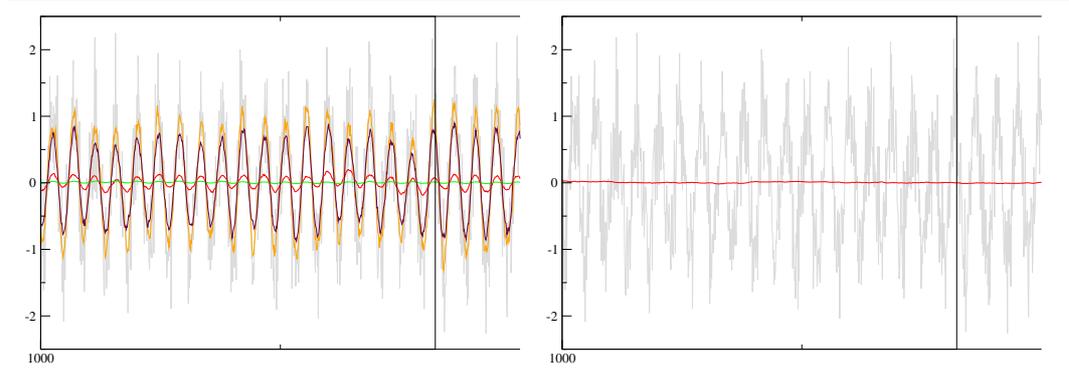


Abbildung 1.2: Glättung des verrauschten periodischen Signals mittels *Running average*-Filter. Verwendet wurde eine Sinus-Zeitreihe mit einer Standardabweichung des gaußschen Rauschens von 0.5. Im linken Graphen ist die Glättung mittels *Running average*-Filter der Fensterbreite 10, 20, 100 und 1000 zu sehen, im rechten Graphen der Effekt, wenn die Fensterbreite des Filters einem Vielfachen der Sinus-Periodendauer entspricht (Fensterbreite hier: 440). Im Hintergrund bei beiden Abbildungen ist das ursprüngliche Signal mit Rauschanteilen (große Amplitude). Gezeigt ist immer nur ein Ausschnitt aus der Zeitreihe.

► Der einfachste Weg, einen Jahresgang zu eliminieren, ist, jeweils nur einen Wert pro Jahr zu nehmen (z.B. den Mittelwert, jedenfalls immer den gleichen Wert).

■ **Glättung eines periodischen Signals mit Rauschen** Während die Filterung den Mittelwert mit steigender Fensterbreite quasi nicht verändert (die Werte für \bar{x} sind als nichtsignifikante Schankungen um null anzusehen), nimmt die Standardabweichung ab. Ein besonders starker Abfall von σ_x ist zu verzeichnen, wenn die Fensterlänge des Filters größer ist als die Periodenlänge des Sinus-Signals.

Der rechte Graph in Abb. 1.2 gibt den Effekt wieder, der durch die Wahl der Fensterbreite bei einem Vielfachen der Periodendauer des Sinus-Signals entsteht. Gut zu sehen ist, daß diese Wahl der Fensterbreite des Filters das Sinus-Signal selbst “glättet” bzw. effektiv eliminiert.

Das eröffnet unterschiedliche Anwendungsmöglichkeiten von *Running average*-Filtern je nach dem gewünschten Effekt und den Anforderungen:

Eliminierung von Rauschanteilen eines periodischen Signals

Soll ein periodisches Signal von Rauschanteilen befreit werden, sollte die Fensterbreite des *Running average*-Filters möglichst kleiner sein als die Periodenlänge des gewünschten periodischen Signals, keinesfalls jedoch ein Vielfaches derselben.

Analyse der Langzeitentwicklung

Ist nicht die Periode des Signals von Interesse, sondern nur die Langzeitentwicklung der gesamten Zeitreihe (versteckte Trends, Perioden mit großer Periodendauer, ...), wird die Fensterbreite des *Running average*-Filters deutlich größer als die Periodendauer des periodischen Signals gewählt. Idealerweise wählt man ein Vielfaches der Periodendauer. Dadurch wird die Periode als solche eliminiert.

1.2.3 Filter in der Praxis

In der Praxis sollte die Anwendung von Filtern immer gut **dokumentiert** und **motiviert** sein. Ganz wichtig ist, daß die **Rohdaten zugänglich** sind. Der Grund: mit Filtern ist alles machbar.

Da es in der Praxis immer willkürlich ist, wie und was angewandt wird, sollten **mehrere Methoden** zur Anwendung kommen. Sind die Daten robust (unabhängig von der Methode), dann sind die gezogenen Schlüsse vertrauenswürdig, ansonsten sollte man sehr vorsichtig sein, da die Gefahr von Artefakten besteht.

Robustheit

1.3 Autokorrelationsfunktion (AKF)

Die Autokorrelationsfunktion (AKF) ist das wesentliche diagnostische Hilfsmittel der Zeitreihenanalyse. Sie beschreibt die Entwicklung eines Prozesses in der Zeit. Deshalb spricht man hier oft von **Analyse im Zeitbereich**. (Chatfield, 1982)

Analyse im Zeitbereich

1.3.1 Herleitung der AKF

Der Korrelationskoeffizient zweier Größen x und y

$$C(x, y) = \frac{\langle x \cdot y \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{Cov(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad (1.15)$$

beschreibt, wie eng die beiden Größen x und y miteinander (linear) korreliert sind. Wird für die zweite Größe y anstelle eines unabhängigen Wertes der Wert von x zur Zeit $t + k$, x_{i+k} eingesetzt, erhält man den Autokorrelationskoeffizienten

$$C(x_i, x_{i+k}) = \frac{\langle x_i \cdot x_{i+k} \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_{i+k} \rangle}{\sigma_x^2} \quad (1.16)$$

für die Autokorrelation mit der Verschiebung (dem *lag*) k . Schreibt man diesen Term als Funktion von k , so erhält man die Autokorrelationsfunktion (AKF)¹

Autokorrelationsfunktion (AKF)

$$C(k) = \frac{\langle x_i \cdot x_{i+k} \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_{i+k} \rangle}{\sigma_x^2} = \frac{Cov(k)}{Cov(0)} \quad (1.17)$$

1.3.2 Auftragung der AKF: Das Korrelogramm

Für die Interpretation einer Menge von Autokorrelationskoeffizienten $\{r_k\}$, $r_k \equiv C(k)$, ist es nützlich, diese über der Verschiebung (*lag*) k aufzutragen. Eine solche Auftragung wird **Korrelogramm** genannt. Eine Interpretation dieser Darstellung ist nicht immer leicht.

Korrelogramm

¹engl. *autocorrelation function (ACF)*

Zufallsreihe

Signifikanz

Für eine reine Zufallsreihe ist für große N der Korrelationskoeffizient $r_k \approx 0$ für alle $k \neq 0$. r_k ist approximativ normalverteilt mit $N(0, 1)$. Das bedeutet, daß wir für eine zufällige Reihe erwarten können, daß 19 von 20 Werten der r_k im Intervall $\pm 2/\sqrt{N}$ liegen. Bei einer Auftragung der ersten zwanzig r_k -Werte ist also **durchschnittlich ein "signifikanter" Wert zu erwarten, wenn die Zeitreihe tatsächlich rein zufällig ist**. Dieses Wissen ist wichtig für die Interpretation und deutet auf mögliche Schwierigkeiten hin.

Kurzzeit-Korrelation

Oft weist das Korrelogramm für stationäre Reihen einen ziemlich großen Wert für r_1 auf, dem zwei bis drei signifikant von null verschiedene Koeffizienten folgen, die sukzessive kleiner werden. Für größere k liegen die zugehörigen r_k dagegen nahe bei null.

Eine solche Zeitreihe weist die Tendenz auf, daß einer vom Mittelwert verschiedenen Beobachtung eine oder mehrere ebenfalls abweichende Beobachtungen folgen.

Alternierende Reihen

Die Alternanz der Zeitreihe zeigt sich deutlich auch im Korrelogramm: Aufeinanderfolgende Werte der AKF liegen auf verschiedenen Seiten des Gesamtmittelwertes.

Nichtstationäre Reihen

Enthält eine Zeitreihe einen Trend, können die r_k erst für sehr große Werte von k verschwinden: Einer Beobachtung auf einer Seite des Gesamtmittelwertes folgen wegen des Trends eine hohe Zahl von Beobachtungen auf der gleichen Seite.

Solche Korrelogramme enthalten sehr wenig verwertbare Informationen, da alle Eigenschaften vom Trend überlagert werden. Deshalb sollten Korrelogramme nur für stationäre Zeitreihen ausgewertet werden. Verschiedene Methoden der Trendelimination werden in Abschnitt 1.2 diskutiert.

Periodische Schwankungen

Periodische Schwankungen in der Zeitreihe finden sich mit derselben Frequenz im Korrelogramm wieder. Ein Beispiel: Bei monatlichen Beobachtungen eines Jahresganges wird r_6 groß und negativ sein, während r_{12} groß und positiv ist.

Sind die periodischen Schwankungen bereits aus der Auftragung der Zeitreihe über die Zeit erkennbar, liefert das Korrelogramm wenig zusätzliche Information. Durch Beseitigung der periodischen Schwankungen können in diesem Fall weitere Informationen erhalten werden.

Ist die Zeitreihe dagegen stark verrauscht, kann die Auftragung der Autokorrelationsfunktion nützlich sein, um die Frequenz der periodischen Schwankungen des Ausgangssignales zu bestimmen.

Ausreißer

Ausreißer in einer Zeitreihe können das Korrelogramm ernstlich beeinflussen und somit zu Fehlinterpretationen führen. Sie sollten deshalb nach Möglichkeit in den Ausgangsdaten korrigiert werden.

- Vor der Analyse sollte die Zeitreihe immer erst geplottet und “per Hand” analysiert werden, um z.B. Ausreißer vorher zu erkennen.

1.3.3 Bedeutung der AKF

Wie schon eingangs erwähnt beschreibt die Autokorrelationsfunktion (AKF) die Entwicklung eines Prozesses in der Zeit. Insbesondere lassen sich an der Auftragung der AKF (dem Korrelogramm) Periodizitäten in der Zeitreihe ablesen. Das wird z.B. in der Bioinformatik genutzt: Hier ist die Periode 3 das stärkste Signal einer codierenden DNA-Sequenz.

Die AFK spielt auch eine große Rolle bei der Bestimmung der Parametern α eines Autoregressiven Prozesses (AR(p)-Prozeß). Die Beziehung zwischen beiden wird durch das System der **Yule-Walker-Gleichungen** wiedergegeben.

1.4 Diskrete stochastische Prozesse

Stochastische Prozesse sind statistische Erscheinungen, die nach Wahrscheinlichkeitsgesetzen in der Zeit ablaufen (Chatfield, 1982). Die Bezeichnung “stochastischer Prozeß” wird meist sowohl für den tatsächlichen physikalischen Prozeß als auch für seine mathematische Modellierung verwendet.

Mathematisch ist ein stochastischer Prozeß definiert als Menge von Zufallsvariablen

*stochastischer
Prozeß*

$$\{X(t), t \in T\}$$

wobei T die Menge der Zeitpunkte ist, zu denen der Prozeß definiert ist (Chatfield, 1982).

Die diskreten stochastischen Prozesse, die im Folgenden näher beschrieben werden sollen, sind reiner Zufall, Irrfahrt (*random walk*), Gleitmittelprozeß, MA(q) (*moving average*) und Autoregressiver Prozeß, AR(p).

Darüber hinaus gibt es unter anderen noch gemischte Modelle, eine Kombination aus AR- und MA-Prozessen (sog. ARMA-Prozesse) und integrierte Modelle (ARIMA-Prozess).

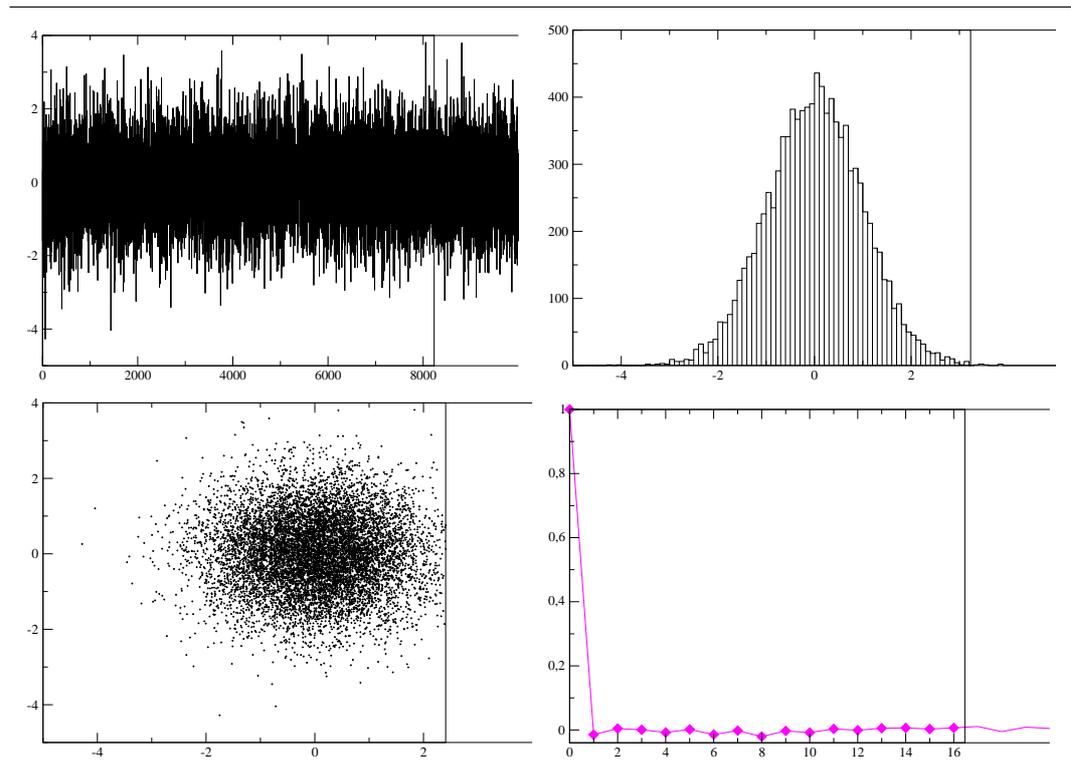


Abbildung 1.3: Weißes Rauschen. Obere Zeile: Darstellung der Zeitreihe $x(t)$ (links) und Histogramm mit 100 bins (entsprechend einer “bin width” von 100 Samples). Untere Zeile: Erste Iterierte der Zeitreihe (links) und Autokorrelationsfunktion (AKF). Aus dem Histogramm läßt sich gut die den Daten zugrundeliegende Verteilung ablesen: Es handelt sich um eine Gaußsche Normalverteilung. Iterierte Abbildung und Korrelogramm (Darstellung der AKF) zeigen eine wichtige weitere Eigenschaft des weißen Rauschens: Aufeinanderfolgende Elemente der Verteilung sind nicht korreliert. Von der AKF ist nur ein Ausschnitt für $k = 1 \dots 20$ gezeigt.

1.4.1 Reiner Zufall

Ein diskreter Prozeß $\{X_t\}$ wird rein zufälliger Prozeß genannt, wenn die Zufallsvariablen $\{Z_t\}$ eine Folge voneinander unabhängiger, identisch verteilter (*independent identical distributed, i.i.d.*) Variablen sind.

$$X_t = Z_t \tag{1.18}$$

Aus dieser Definition folgt unmittelbar, daß Mittelwert $\langle Z_t \rangle$ und Varianz $\sigma_{Z_t}^2$ dieses Prozesses konstant, d.h. zeitunabhängig, sind.

Oft werden die Zufallsvariablen normalverteilt (d.h. gaußsch verteilt) gewählt,

$$Z_t \in \mathcal{N}(0, 1)$$

woraus folgt, daß

$$\langle Z_i \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \sigma_{z_i} = 1$$

Weißes
Rauschen

Dieser Prozeß wird oft als weißes Rauschen (*white noise*) bezeichnet. Beispiele hierfür sind das NYQUIST-Rauschen² und die BROWNSche Bewegung. Für eine graphische Darstellung und Verdeutlichung einiger Eigenschaften dieser Verteilung vgl. Abb. 1.3.

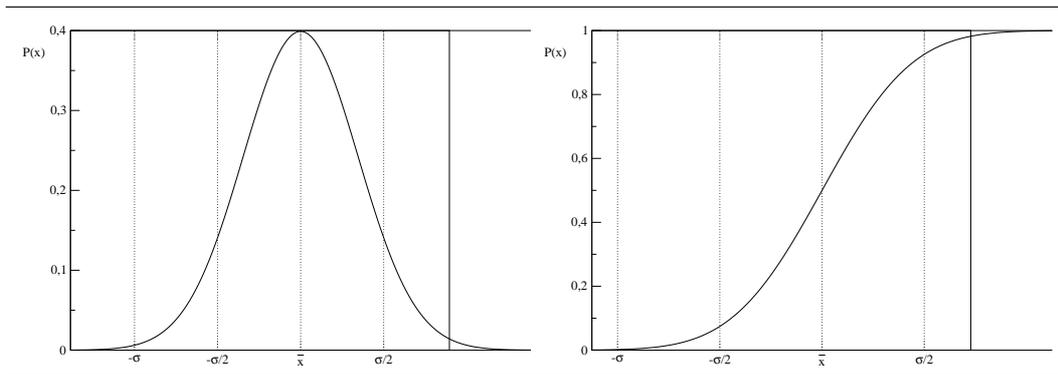


Abbildung 1.4: Wahrscheinlichkeitsdichte (Gaußsche Glockenkurve) und Wahrscheinlichkeitsverteilung (Gaußsches Fehlerintegral) der Gaußschen Fehlerfunktion.

Gaußsche Glockenkurve

$$y = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.19)$$

Dichtefunktion der normierten Normalverteilung (Gaußsche Glockenkurve) Normalverteilung

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \quad (1.20)$$

Bedeutung Reine Zufallsprozesse sind oft Bestandteil komplizierterer Prozesse, so z.B. bei Gleitmittelprozessen (MA(q)-Prozesse, vgl. Abschnitt 1.4.3).

Erzeugung von Zufallszahlen R_1, R_2 seien gleichverteilt im Intervall $[0, 1]$. Dann können zwei Zufallszahlen z_1, z_2 nach folgender Formel (der sogenannten BOX-MÜLLER-Formel) berechnet werden:

BOX-MÜLLER-
Formel

$$z_1 = \sqrt{-2 \ln R_1} \cdot \cos(2\pi R_2)$$

$$z_2 = \sqrt{-2 \ln R_2} \cdot \cos(2\pi R_2)$$

Die resultierenden z_1, z_2 sind unabhängig und $N(0, 1)$ verteilt.

1.4.2 Irrfahrt, Diffusion

Sei $\{Z_t\}$ ein diskreter rein zufälliger Prozeß mit Mittelwert μ und Varianz σ_Z^2 . Ein Prozeß wird Irrfahrt (*random walk, Brownian motion, diffusion*) genannt,

random walk

²dem Blätterrauschen im Wind ähnliches Geräusch in einem Lautsprecher, der an ein elektronisch hochverstärkendes Gerät angeschlossen ist. Dieses Geräusch kommt durch Elektronen-Bewegungen in elektrischen Leitern zustande, die mit zunehmender Temperatur größer werden, daher auch "Elektronen-Rauschen" und "thermisches Rauschen". Der amerikanische Elektroniker Nyquist lieferte die Theorie dazu, weshalb man auch von "Nyquist-Rauschen" spricht. [http://www.ams-magnetfeldtherapie.de/Glossar/Glossar2/Glossar_R.htm]

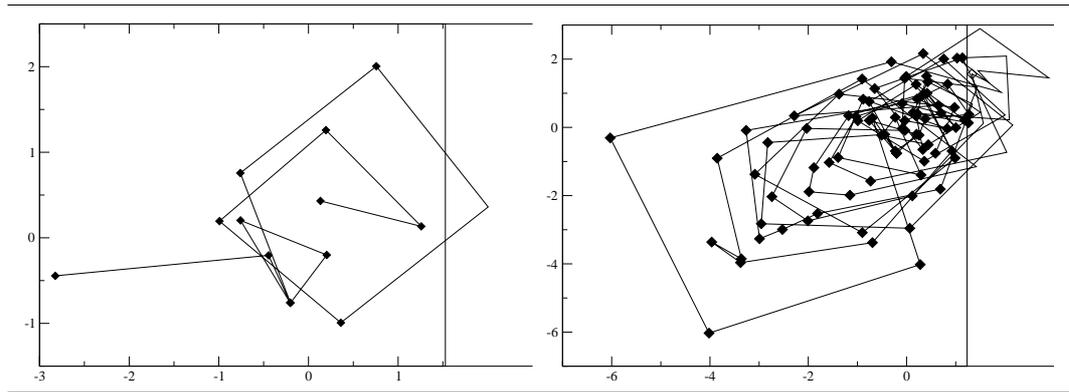


Abbildung 1.5: Irrfahrt (Diffusion, *random walk*). Das Charakteristikum eines solchen Prozesses ist, daß der Wert (hier der Ort) zur Zeit t nur vom Wert (Ort) zur Zeit $t - 1$ abhängt. Ein klassisches Beispiel aus der Physik ist die zufällige Bewegung (Diffusion) eines hinreichend kleinen Teilchens aufgrund der Brownschen Molekularbewegung, die über ein Mikroskop entsprechend sichtbar gemacht werden kann. In der linken Abbildung ist ein Prozeß mit 14 aufeinanderfolgenden Werten gezeigt, rechts mit 100 Werten.

wenn gilt:

$$X_t = X_{t-1} + Z_t \tag{1.21}$$

Das Charakteristikum dieses Prozesses ist, daß der Wert zur Zeit t nur vom Wert zur Zeit $t - 1$ abhängt.

Dieser Prozeß beginnt gewöhnlich mit null bei $t = 0$, so daß er sich allgemein schreiben läßt als

$$X_t = \sum_{i=1}^t Z_i \tag{1.22}$$

Dann ist der Mittelwert $E(X_t) = t\mu$ und die Varianz $\text{Var}(X_t) = t\sigma_Z^2$.

Da sowohl der Mittelwert als auch die Varianz zeitabhängig sind, ist dieser Prozeß **nichtstationär**. Die ersten Differenzen dieses Prozesses stellen dagegen einen reinen Zufallsprozeß

$$Z_t = X_t - X_{t-1} \tag{1.23}$$

dar, der stationär ist.

Beispiele Das bekannteste Beispiel aus der Physik ist die Diffusion aufgrund der Brownschen Molekularbewegung (*diffusion*, vgl. Abb. 1.5). In den Wirtschaftswissenschaften werden häufig Aktienkurse durch diesen Prozeß modelliert.

1.4.3 Gleitmittelprozeß, MA(q)

moving average process

Sei $\{Z_t\}$ ein diskreter rein zufälliger Prozeß mit Mittelwert $\mu(Z_t) = 0$ und Varianz σ_Z^2 . Ein Prozeß wird dann Gleitmittelprozeß (*moving average process*) der Ordnung q , MA(q)-Prozeß³, genannt, wenn er sich schreiben läßt als

$$X_t = \beta_0 Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \dots + \beta_q Z_{t-q} \tag{1.24}$$

³MA — abgekürzt für *moving average* — Gleitmittel

mit

$$\sum_{n=1}^q \beta_n = 1 \quad (1.25)$$

Dabei sind $\{\beta_i\}$ Konstanten.

Bedeutung MA-Prozesse finden vielfältige Anwendung, insbesondere in der Ökonomie. Sie werden überall dort eingesetzt, wo eine Größe durch eine Vielzahl zufälliger Ereignisse beeinflusst wird, und das nicht nur in einem unmittelbaren Effekt, sondern in geringerem Ausmaß auch zu verschiedenen nachfolgenden Zeitpunkten.

1.4.4 Autoregressive Prozesse, AR(p)

Sei $\{Z_t\}$ ein diskreter rein zufälliger Prozeß mit Mittelwert $\mu(Z_t) = 0$ und Varianz σ_Z^2 . Ein Prozeß wird dann autoregressiver Prozeß (*autoregressive process*) der Ordnung p , AR(p)-Prozeß, genannt, wenn er sich schreiben läßt als

autoregressiver
Prozeß

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \cdots + \alpha_p X_{t-p} + Z_t \quad (1.26)$$

X_t hängt von vergangenen Werten von X_t (X_{t-p}) ab, daher die Bezeichnung *autoregressiv*. Die Ordnung des Modells gibt die Zahl der erklärenden Modellkomponenten an.

AR(1)-Prozeß

Für einen autoregressiven Prozeß erster Ordnung ($p = 1$), auch MARKOV-Kette⁴ genannt, gilt:

Markov-Kette

$$X_t = \alpha X_{t-1} + Z_t \quad (1.27)$$

Der Parameter α kann dabei als Gedächtnis des Prozesses verstanden werden, der darüber bestimmt, wie stark der Wert zur Zeit t vom Vorgängerwert abhängt.

Durch sukzessive Substitution kann Gleichung (1.27) geschrieben werden als

$$\begin{aligned} X_t &= \alpha (\alpha X_{t-2} + Z_{t-1}) + Z_t \\ &= \alpha^2 (\alpha X_{t-3} + Z_{t-2}) + \alpha Z_{t-1} + Z_t \end{aligned}$$

Unter der Bedingung $|\alpha| < 1$ kann X_t als ein MA-Prozeß unendlicher Ordnung, MA(∞) ausgedrückt werden:

$$X_t = Z_t + \alpha Z_{t-1} + \alpha^2 Z_{t-2} + \cdots \quad (1.28)$$

Der Grund für die Bedingung $|\alpha| < 1$ ist unmittelbar aus Gleichung (1.28) ersichtlich: Sie ist notwendig, damit der Prozeß $\{X_t\}$ nicht explodiert, sondern stabil und stationär ist.

⁴nach A. A. Markov, 1856–1922

Für die Autokorrelationsfunktion $C(k)$ des AR(1)–Prozesses gilt

$$C(k) = \alpha^{|k|} \quad (1.29)$$

Sie fällt geometrisch ab und alterniert für negative Werte von α .

Allgemein gilt für AR–Prozesse:

- AR–Prozesse sind auf Gleitmittelprozesse (MA(q)–Prozesse) abbildbar
 - AR–Modelle beschreiben Schankungen um Null
- Daher muß vor der Modellierung mit AR–Modellen ein eventuell vorhandenes “Offset” abgezogen werden.

Bedeutung AR–Prozesse finden häufig dann Anwendung, wenn die Annahme gerechtfertigt ist, daß der vorliegende Wert einer Zeitreihe von den unmittelbar vergangenen Werten abhängt, zusammen mit einem Zufallsfehler.

Eine Anwendung von AR–Prozessen (dort als Markov–Prozesse bezeichnet) ist in der Bioinformatik beim Sequenzalignment. (Vgl. u.a. Durbin et al., 1998)

1.5 Leistungsspektrum, $S(m)$

Das Leistungsspektrum, auch Spektraldichtefunktion genannt, beschreibt, wie die Gesamtvariation einer Zeitreihe durch die zyklischen Komponenten bei verschiedenen Frequenzen erklärt werden kann. Deshalb spricht man im Zusammenhang mit der Spektralanalyse auch von **Analyse im Frequenzbereich**⁵. (Chatfield, 1982)

*Analyse im
Frequenzbereich*

Das Leistungsspektrum

$$S(m) = \sum_{k=0}^M C(k) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot k \cdot m}{M}\right) \quad (1.30)$$

mit der Zeit k und der Frequenz m ist die Fouriertransformierte⁶ $\mathcal{F}(C(k))$ der Autokorrelationsfunktion (AKF). Die AKF $C(k)$ ist definiert als

$$C(k) = \frac{\text{Cov}(k)}{\text{Cov}(0)} = \frac{\langle (x_i x_{i+k}) - x_i x_{i+k} \rangle}{\sigma_x^2} \quad (1.31)$$

Sie ist symmetrisch (gerade) für stationäre Prozesse, denn es gilt wegen der Zeitunabhängigkeit

$$\langle x_i x_{i+k} \rangle = \langle x_{i-k} x_i \rangle \quad (1.32)$$

Wegen dieser Eigenschaft (symmetrisch, gerade) und weil die Autokorrelationsfunktion rein reell ist, verschwindet die sin–Transformierte der Fouriertransformation für das Leistungsspektrum $S(m)$.

⁵im Gegensatz zur **Analyse im Zeitbereich** mittels der Autokorrelationsfunktion (AKF) $C(k)$, vgl. Abschnitt 1.3

⁶Für die Fourier–Transformation vgl. Kap. 2

Der erste Koeffizient des Leistungsspektrums für $m = 0$ entspricht dem Mittelwert (“Gleichanteil”). Jeder weitere Koeffizient entspricht einer \cos -Funktion der Frequenz m im Intervall M .

Das Leistungsspektrum $S(m)$ liefert also die Antwort auf die Frage: Wie gut approximiert eine \cos -Funktion der Frequenz m die Autokorrelationsfunktion $C(k)$?

Kapitel 2

Fourier–Analyse

So wie Überlagerungen von Sinus– oder Cosinus–Schwingungen wieder Schwingungen, also periodische Erscheinungen ergeben, lassen sich umgekehrt beliebige periodische Erscheinungen als Überlagerung reiner Sinus– bzw. Cosinus–Schwingungen darstellen. Dies ist die Aussage des Satzes von Fourier. (Stöcker, 1998)

2.1 Numerische harmonische Analyse: Fourier–Analyse

Eine Funktion, die im Intervall $0 \leq x < L$ nur auf einem diskreten System von Punkten $x_k = \frac{L}{N}k$ mit $k = 0, 1, \dots, N-1$ bekannt ist, läßt sich näherungsweise durch ein trigonometrisches Polynom darstellen:

$$T_N(x) = \sum_{l=0}^{N-1} c_l \exp\left(i \frac{2\pi}{L} lx\right) \quad (2.1)$$

wobei die Koeffizienten c_l (auch: **Fourierkoeffizienten**) durch

*Fourier-
koeffizienten*

$$c_l = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} lj\right) \quad (2.2)$$

gegeben sind. Der Koeffizient c_0 stellt den Mittelwert dar. Für eine gerade Anzahl N von Stützstellen ist $c_{N/2}$ reell. Die Koeffizienten haben folgende Symmetrie: $c_l = c_{N-l}^*$ für $l = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$.

Das trigonometrische Polynom läßt sich umschreiben in:

$$T_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-1} \left(a_l \cos\left(\frac{2\pi}{L} lx\right) + b_l \sin\left(\frac{2\pi}{L} lx\right) \right) + \frac{a_{\frac{N}{2}}}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{L} 2x\right) \quad (2.3)$$

wobei für die Parameter a und b folgende Zusammenhänge gelten:

$$a_0 = 2c_0 \quad a_k = 2\Re(c_k) \quad b_k = -2\Im(c_k) \quad a_{\frac{N}{2}} = 2c_p \quad (2.4)$$

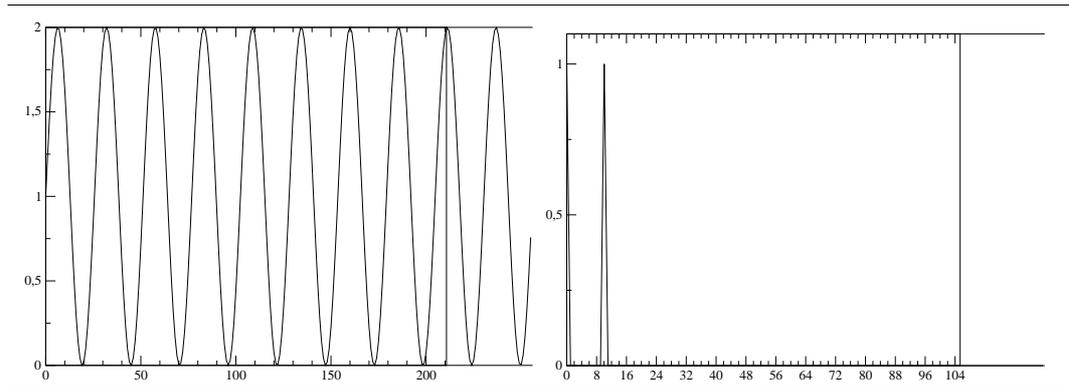


Abbildung 2.1: Numerische harmonische Analyse: Fourieranalyse. Links dargestellt ist die ursprüngliche Zeitreihe, es handelt sich um eine verschobene Sinus-Zeitreihe der Frequenz 10 (in Samples). Im rechten Graphen das Amplitudenspektrum der Fouriertransformation der Zeitreihe. Gut zu sehen ist hier der “Peak” bei der Frequenz von 10. Ebenfalls zu sehen ist, daß die Frequenzskala (Abszisse) nur bis zur Nyquist-Frequenz skaliert ist, da höhere Frequenzen nicht dargestellt werden können (Sampling-Theorem).

mit $k = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$. Schließlich kann auch die Amplitude A_k ($k = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$) der Teilschwingung mit der Frequenz $\omega_k = \frac{2\pi}{L}k$ mit $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ berechnet werden.

■ **Numerische harmonische Analyse: Fourieranalyse.** Gegeben sei eine Zeitreihe $x(t_i) = 1 + \sin\left(2\pi 10 \frac{t_i}{256}\right)$ mit $t_i = 0, \dots, 255$. Sie kann als eine verschobene Sinus-Zeitreihe mit der Frequenz von 10 interpretiert werden. Die Sampling-Rate (in Samples pro Einheitsintervall) beträgt 256.

Mit dem Programm Grace wurde die numerische harmonische Analyse (FFT) dieser Zeitreihe berechnet. Für eine Darstellung der ursprünglichen Zeitreihe und ihres Amplitudenspektrums (Auftragung der Amplitude gegen die Frequenz) vgl. Abb. 2.1. Zusätzlich zum Amplitudenspektrum wurden die Koeffizienten der Fourier-Transformation (über FFT) berechnet.

Über die oben dargestellten Zusammenhänge kann aus den Real- und Imaginärteilen der Fourierkoeffizienten c_l der Mittelwert, die Amplitude und die Frequenz der Sinuszeitreihe wiedergefunden werden. Die folgenden Werte der Fourierkoeffizienten c_l waren signifikant von den sie umgebenden Werten verschieden:

$$\begin{aligned} \Re(1) &= 1 & \Re(64) &= 0 & \Re(128) &= 0 \\ \Im(0) &= 0 & \Im(10) &= -0.5 & \Im(64) &= 0 & \Im(128) &= 0 & \Im(246) &= 0.5 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Mittelwert $c_0 = 1$, da $\Re(c_0) = 1$ und $\Im(c_0) = 0$. Die Amplitude A_k für $k = 10$ beträgt $A_{10} = \sqrt{a_{10}^2 + b_{10}^2} = 1$ mit $\Re(c_{10}) \approx 0$ und $\Im(c_{10}) = -0.5$.

Von besonderer Bedeutung für die Analyse von Zeitreihen ist der Zusammenhang zwischen Autokorrelationsfunktion (AKF) und Leistungsspektrum. Sie wird durch das Wiener-Chinchin-Theorem beschrieben.

Wiener-
Chinchin-
Theorem

▲ **Wiener-Chinchin-Theorem** (*Wiener-Khinchin Theorem*) Die grundsätzliche Aussage des Wiener-Chinchin-Theorems ist, daß die Autokorre-

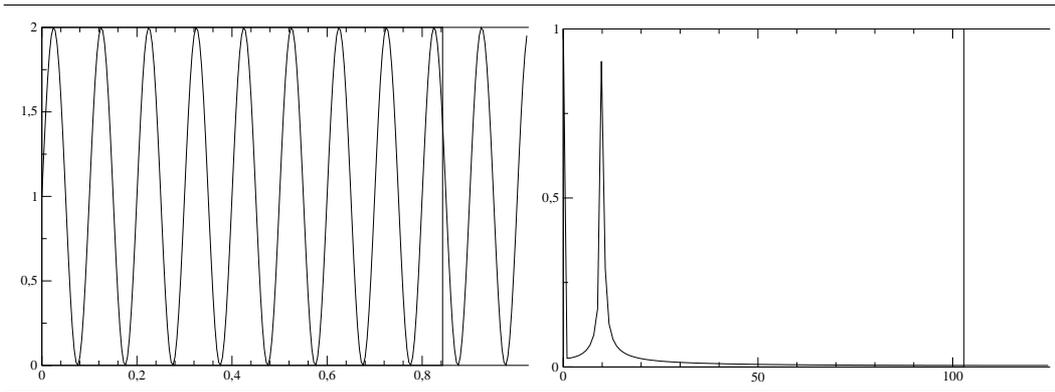


Abbildung 2.2: Artefakte bei der Spektralschätzung: Randeffekte. Links ist die Zeitreihe dargestellt. Es handelt sich um eine Sinus-Zeitreihe mit der Frequenz 10 Samples und einer Samplingrate von 250. Rechts ist das Amplitudenspektrum der Fouriertransformation der Zeitreihe abgebildet. Gut zu sehen ist im Amplitudenspektrum die Breite des Peaks, ein typischer Randeffekt, der durch die Aperiodizität des Signals an seinen Rändern entsteht.

lationsfunktion $C(k)$ und das Leistungsspektrum $S(\omega)$ die Fouriertransformierte bzw. inverse Fouriertransformierte der jeweils anderen ist:

$$C(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S(\omega) e^{i\omega k} d\omega \quad (2.5)$$

$$S(\omega) = \int_0^\infty C(k) e^{-i\omega k} dk \quad (2.6)$$

Da sowohl die AFK als auch das Leistungsspektrum rein reell sind, verschwindet die sin-Transformierte der Fourier-Transformation. Unter Ausnutzung der Beziehung

$$\exp(i\omega k) = \cos(\omega k) + i \sin(\omega k) \quad (2.7)$$

vereinfacht sich dadurch der Exponential-Term zu $\cos(\omega k)$.

Das Leistungsspektrum $S(\omega)$ dient dabei vornehmlich der Datenanalyse, die Autokorrelationsfunktion (AKF) $C(k)$ der Modellbildung (z.B. über die Abschätzung der Parameter eines AR(p)-Modells).

2.2 Artefakte bei der Spektralschätzung

2.2.1 Randeffekte

Eine der Fourier-Analyse zugrundeliegende Annahme ist, daß das transformierte Signal der Länge L periodisch ist, d.h. $x(t_i + L) = x(t_i)$ und damit z.B. $x(0) = x(L)$. Diese Bedingung erfüllen viele Signale *nicht*. Dadurch kommt es zu sogenannten Randeffekten: Verbreiterung und Verschiebung von relativen Maxima des Amplitudenspektrums. Diese Randeffekte können durch geschickte sogenannte "Fensterfunktionen" verkleinert werden. Das diesen Fensterfunktionen zugrundeliegende Prinzip ist, Datenpunkte an den Rändern geringer zu wichten als in der Mitte des Signals.

Randeffekte

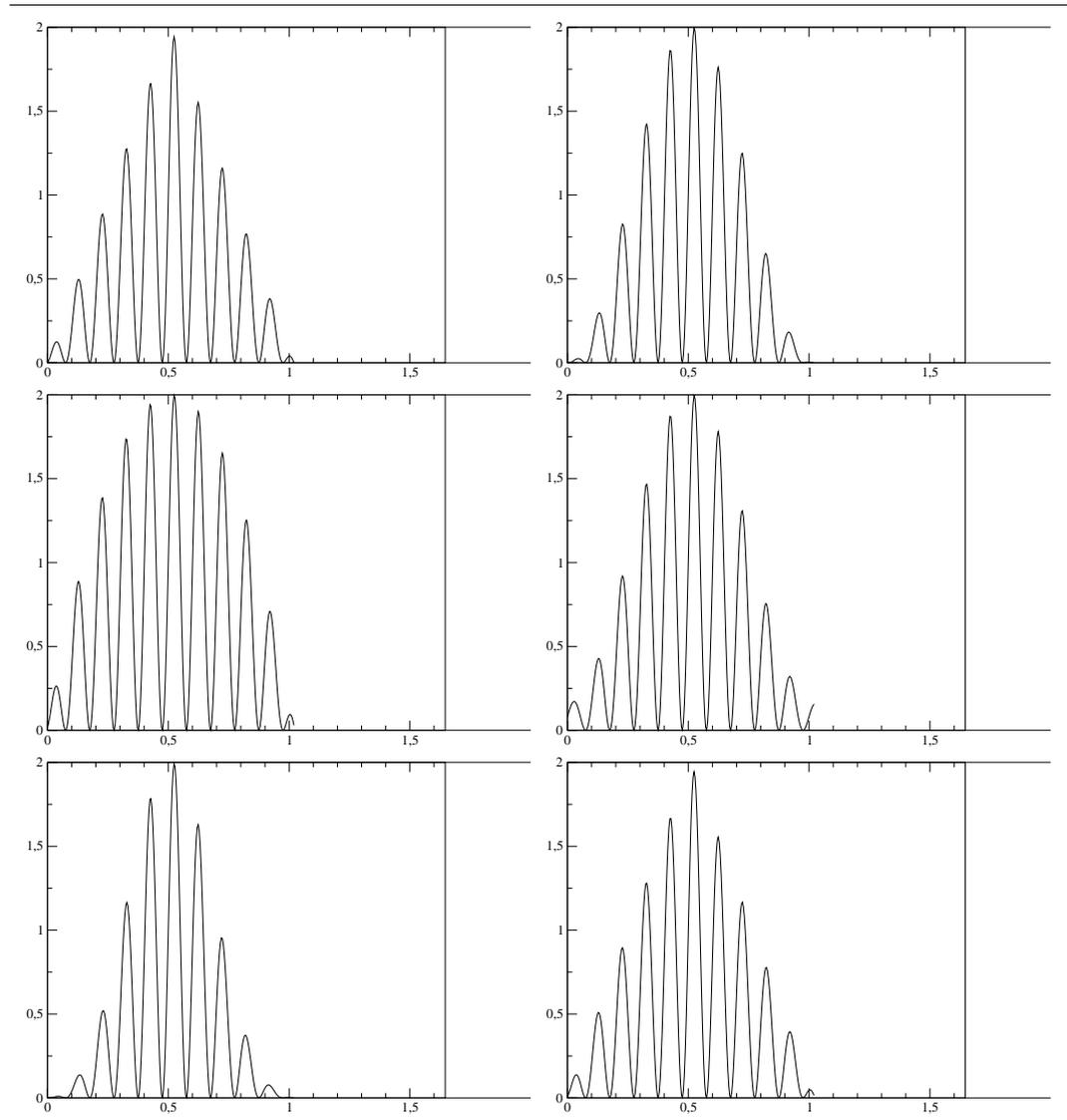


Abbildung 2.3: Randeffekte als Artefakte bei der Spektralschätzung: Verschiedene Fensterfunktionen der Fourier–Analyse. Von links nach rechts und von oben nach unten: triangular, hanning, welch, hamming, blackman, parzen. Für ihre Wirkung auf ein an seinen Rändern nichtperiodisches Signal vgl. die Abb. 2.4. Die unterschiedlichen Fensterfunktionen unterscheiden sich hauptsächlich durch ihre unterschiedliche Wichtungsverteilung zwischen Mitte und Rändern.

- **Randeffekte** Zur näheren Analyse dieses Phänomens wurde eine Datenreihe $x(t_i) = 1 + \sin\left(2\pi 10 \frac{t_i}{250}\right)$ mit $t_i = 0, \dots, 255$ erzeugt. Sie stelle eine Sinuszeitreihe mit der Frequenz 10 Hz dar, die mit der Samplingfrequenz $f_s = 250$ Hz gesampled wurde. Sie ist mit einer auf Sekunden normierten Abszisse in Abb. 2.2 (links) dargestellt. Von dieser Zeitreihe wurde eine Fouriertransformation (FFT) durchgeführt und das Amplitudenspektrum dieser Transformation dargestellt (Abb. 2.2, rechts).

Sehr deutlich zu sehen ist der an seinen Rändern sehr breite “Peak” im Amplitudenspektrum, ein typisches Ergebnis der Randeffekte. Als Vergleich kann das Amplitudenspektrum der Sinuszeitreihe mit derselben Frequenz, allerdings periodischen Rändern (Abb. 2.1, S. 26) herangezogen werden. Es weist wesentlich steilere Ränder des “Peaks” im Amplitudenspektrum auf.

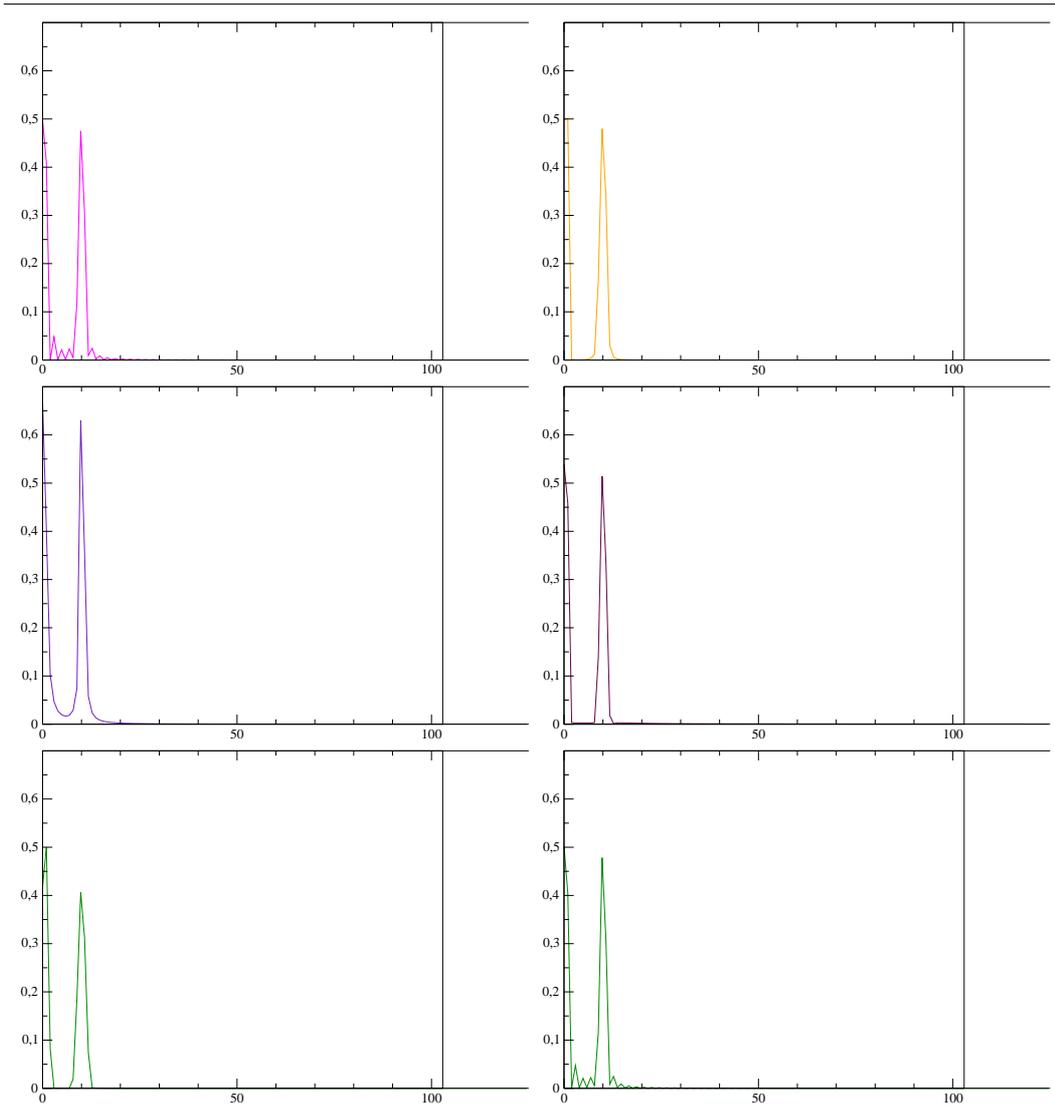


Abbildung 2.4: Randeffekte als Artefakte bei der Spektralschätzung: Anwendung verschiedener Fensterfunktionen der Fourier-Analyse auf eine an ihren Rändern nichtperiodische Sinusdatenreihe. Von links nach rechts und von oben nach unten: triangular, hanning, welch, hamming, blackman, parzen. Für eine Darstellung der einzelnen Fensterfunktionen vgl. Abb. 2.3.

Zur Korrektur solcher Randeffekte können bei der Fouriertransformation sogenannte Fensterfunktionen (*window functions*) eingesetzt werden, die die Datenwerte am Rand weniger wichten als die in der Mitte gelegenen. Die Abb. 2.3 gibt eine Übersicht über die sechs in **Grace** implementierten solchen Fensterfunktionen. In Abb. 2.4 ist dann ihre Wirkung auf die in 2.2 dargestellte an ihren Rändern nichtperiodische Sinuszeitreihe dargestellt.

Es fällt auf, daß alle Fensterfunktionen die Amplitude im Amplitudenspektrum deutlich verringern, am stärksten blackman, am schwächsten welch. Welch ist gleichzeitig die Fensterfunktion mit den steilsten Signalfanken. Bei triangular und parzen treten kleine Artefakte an den Rändern des Amplitudenpeaks auf.

*Fenster-
funktionen*

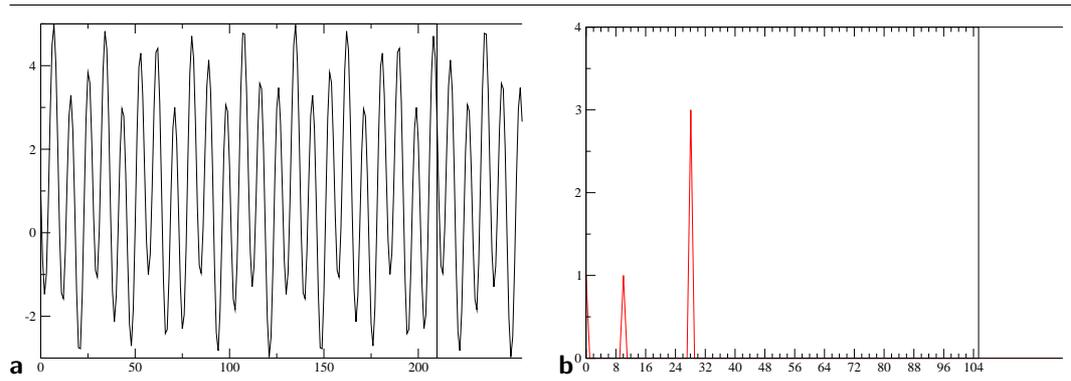


Abbildung 2.5: Artefakte bei der Spektralschätzung: Aliasing. Links ist die Zeitreihe dargestellt. Es handelt sich um eine Überlagerung zweier Sinus-Zeitreihen mit den Frequenzen 10 und 228 (jeweils in Samples). Rechts ist das Amplitudenspektrum der Fouriertransformation der Zeitreihe abgebildet. Deutlich zu sehen ist hier der hohe “Peak” bei einer Frequenz von ca. 28, der ein Artefakt des Samplings ist, da die Zeitreihe eine Frequenz enthält, die deutlich über der Nyquist-Frequenz liegt.

2.2.2 Aliasing

Die Fourierzerlegung liefert für eine diskrete Datenreihe der Länge L mit N Samples N unabhängige Koeffizienten c_l . Die niedrigste dabei verwendete Frequenz ist $\omega = \frac{2\pi}{L}$, alle anderen Frequenzen ω_k mit $k = 1, \dots, \frac{N}{2}$ sind Vielfache dieser Frequenz. Die höchste Frequenz $\omega_{\frac{N}{2}}$ ist die sogenannte Nyquist-Frequenz. Treten in einem Signal Frequenzen auf, die höher sind als die Nyquist-Frequenz, kommt es zu Aliasing-Problemen, d.h. die Frequenz wird nicht richtig dargestellt und das Frequenzspektrum weist Artefakte auf.

Nyquist-Frequenz
Aliasing

- **Aliasing** Um das an einem Beispiel zu verdeutlichen, wurde eine Datenreihe zweier überlagerter Sinussignalen $x(t_i) = 1 + \sin\left(2\pi 10 \frac{t_i}{256}\right) + 3 \sin\left(2\pi 228 \frac{t_i}{256}\right)$ mit $t_i = 1, \dots, 255$ erzeugt. Die beiden überlagerten Frequenzen sind 10 und 228, die Samplingfrequenz 256. Hiervon wurde die Fouriertransformation berechnet und als Amplitudenspektrum dargestellt (vgl. Abb. 2.5). Gut zu sehen ist der “Peak” im Spektrum bei der Frequenz von 10, aber daneben ein wesentlich höherer “Peak” bei einer Frequenz von ca. 28, der eindeutig ein Artefakt ist.
- Sampling mit einer Frequenz, die niedriger als das Doppelte der maximalen im Signal vorkommenden Frequenz ist, kann zu ernstzunehmenden Fehlern durch Artefakte in Form niedrigerer Frequenzen führen.

Kapitel 3

Grundbegriffe dynamischer Systeme

Grundsätzlich kann jedes bewegte System als dynamisches System aufgefaßt und mit der Sprache und den Mitteln der nichtlinearen Dynamik beschrieben werden. Wie in der Übersicht (Abb. 3.1) dargestellt, werden dynamische Systeme durch drei unterschiedliche Klassen von Größen bestimmt, den Variablen, Parametern und Fluktuationen.

Die Zeitreihe selbst liefert erst einmal nur die Daten. Ziel der in den beiden vorangegangenen Kapiteln vorgestellten Methoden der klassischen Zeitreihenanalyse ist es, aus den (experimentellen) Daten die Parameter zu schätzen und gegebenenfalls Rauschanteile zu minimieren.

Die **nichtlineare Dynamik** nähert sich dem Problem im Gegensatz zur Zeitreihenanalyse von der theoretischen Seite her und versucht, Modelle an die Daten anzupassen, die ein System hinreichend genau beschreiben (reproduzieren und überprüfbar voraussagen) können. Über die mathematische Analyse der Dynamik eines solchen Modells ergeben sich oft erstaunliche Erkenntnisse, die dann ihrerseits wieder auf die realen Systeme übertragen und dort (zumindest im Idealfall) experimentell verifiziert werden können.

*nichtlineare
Dynamik*

Die drei zentralen Begriffe der nichtlinearen Dynamik, die im folgenden definiert werden, sind Phasenraum, Attraktor und Bifurkation.

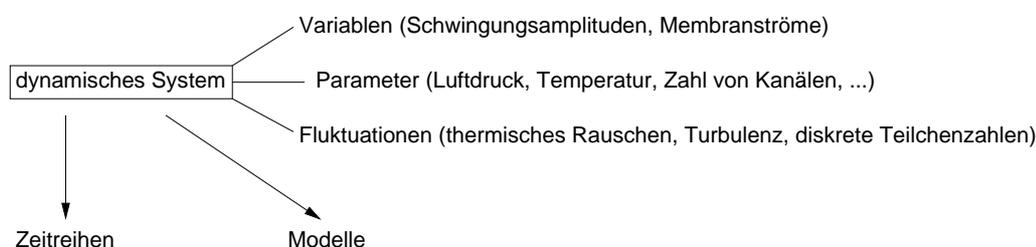


Abbildung 3.1: Grundbegriffe dynamischer Systeme. Dynamische Systeme werden durch drei Klassen von Größen bestimmt: Variablen, Parameter und Fluktuationen. Variablen sind die veränderlichen Größen im System, Parameter bleiben i.d.R. konstant und Fluktuationen repräsentieren die stochastische Komponente dieser Systeme. Dynamische Systeme werden als Zeitreihen gemessen. Durch Analyse dieser Zeitreihen mit den vorgestellten Methoden lassen sich verschiedene Modelle erstellen und anpassen.

- Phasenraum* ▲ **Phasenraum** *phase space* Der Phasenraum (auch: Zustandsraum) wird durch die Variablen des Systems aufgespannt und kann entsprechend hochdimensional sein. Der vollständige Phasenraum beinhaltet alle möglichen Zustände des Systems. Jeder Punkt im Phasenraum entspricht dabei einem eindeutigen Zustand.
- Bei der Analyse und graphischen Darstellung werden normalerweise nur zwei oder drei Dimensionen dargestellt. Existiert in einem System nur eine Variable, kann das System im sogenannten Pseudophasenraum dargestellt werden. D.h. das System wird gegen seine erste (und zweite) zeitliche Ableitung oder mit zeitlichem Versatz gegen sich selbst (Delay-Koordinaten) aufgetragen.
- Attraktor* ▲ **Attraktor** *attractor*, eine Menge im Phasenraum, die invariant¹, attraktiv² und rekurrent ist. Jeder Attraktor besitzt ein Einzugsgebiet (Bassin), das aus den Trajektorien besteht, die sich für große Zeiten ($t \rightarrow \infty$) asymptotisch nähern. (Ebeling et al., 1990)
- Bifurkation* ▲ **Bifurkation** *bifurcation* Von Bifurkation spricht man bei einer qualitativen Änderung der Attraktoren und ihrer Einzugsgebiete (Bassins) bei Parametervariation.
- Beispiele sind die Heugabel-Bifurkation (aus einem stabilen Fixpunkt werden zwei stabile Fixpunkte und ein instabiler Fixpunkt) und die Hopf-Bifurkation (ein stabiler Fixpunkt wird zu einem stabilen Grenzzyklus).
- Weitere Begriffe wie Trajektorie oder Orbit, Transiente, Bassin und Dissipation spielen ebenfalls bei der Beschreibung dynamischer Systeme eine große Rolle und sollen daher ebenfalls hier definiert werden.
- Trajektorie* ▲ **Trajektorie, Orbit** *trajectory, orbit* Eine Trajektorie ist die Lösungskurve (Zeitreihe) im Phasenraum (Zustandsraum), die von einem definierten Startpunkt (Anfangsbedingung) ausgeht.
- Transiente* ▲ **Transiente** Liegen die Anfangsbedingungen eines Systems nicht schon auf einem Attraktor, zeigt das System ein Einschwingverhalten. Die Trajektorie (Lösungskurve) eines Systems ausgehend von der Anfangsbedingung bis zum Erreichen des Attraktors wird als Transiente bezeichnet. Die Menge aller Transienten, die zum selben Attraktor führen, heißt Bassin oder Einzugsgebiet des Attraktors.
- Bassin* ▲ **Bassin** *Einzugsgebiet* Als Bassin eines Attraktors wird die Menge aller Anfangsbedingungen bezeichnet, die (für lange Zeiten) zum Attraktor führen. Die Trajektorie (Lösungskurve) eines Systems ausgehend von der Anfangsbedingung bis zum Erreichen des Attraktors wird als Transiente

¹invariant: befindet sich das System im Attraktor, bleibt es für alle Zeiten dort

²attraktiv: eine Menge in der Nähe des Attraktors kontrahiert auf den Attraktor

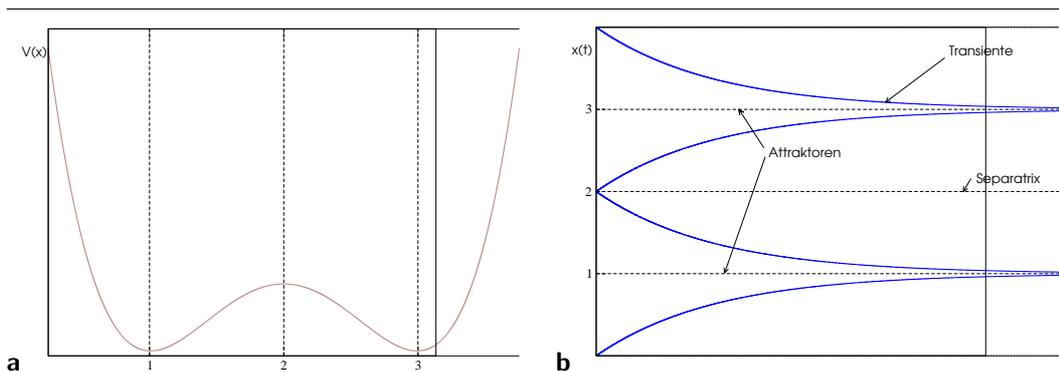


Abbildung 3.2: Bistabilität. (a) Anschauliche Darstellung der Bistabilität als Potential mit zwei Minima. (b) Zeitentwicklung des Systems: Je nach Startpunkt (Anfangsbedingung) läuft das System exponentiell für lange Zeiten in einen der beiden Minima (Attraktor, hier stabiler Fixpunkt). Die Bassins (Einzugsgebiete) beider Attraktoren werden durch eine Separatrix getrennt.

bezeichnet.

- ▲ **Dissipation** Unter dem Begriff der Dissipation werden Energieverluste, die durch Dämpfung und andere irreversible Prozesse entstehen, zusammengefaßt. Dissipative Systeme haben im Gegensatz zu konservativen Systemen eine vorgegebene Richtung ihrer Dynamik. Sie weisen ein Einschwingverhalten (Transienten) und ein asymptotisches Verhalten (“Attraktor” im Phasenraum) auf.

Dissipation

Phasenraumrekonstruktion Wie schon bei der Definition des Begriffes Phasenraum angesprochen kann auch bei einzelnen Zeitreihen (mit nur einer Variablen) eine Phasenraumanalyse durchgeführt werden. Dazu gibt es im Wesentlichen zwei Möglichkeiten:

1. Auftragung der Zeitreihe gegen ihre erste (und zweite) zeitliche Ableitung ($X(t)$, \dot{X} , \ddot{X})
2. zeitlich verschobene Auftragung der Zeitreihe gegen sich selbst: Delay-Koordinaten $X_t, X_{t-\tau}, X_{t-2\tau}$ mit der Verschiebung τ

Delay-Koordinaten

Da es bei diskreten Zeitreihen nicht möglich ist, die Ableitung explizit zu berechnen, kann sie aus den ersten Differenzen geschätzt werden:

$$y_i = x_{i+1} - x_i$$

Nach dem gleichen Verfahren können auch höhere Ableitungen geschätzt (und so höherdimensionale Phasenräume aufgespannt) werden.

Der auf diese Weise aufgespannte Raum, in dem die Zeitreihe dargestellt wird, wird auch als **Pseudophasenraum** bezeichnet. In diesem Raum kann das dynamische Verhalten des Systems analog zu dynamischen Systemen mit mehr als einer Variablen analysiert werden. Das führt uns zu einer wichtigen Feststellung:

Pseudo-phasesraum

- ▲ **Satz von Takens:** Eine einzige hinreichend lange Zeitreihe enthält bereits dieselbe Information wie das ganze System. Speziell kann man die Topologie der Trajektorie und damit Existenz und Art der Attraktoren statt aus der Phasenbahn auch aus einer Wiederkehr–Abbildung ablesen, indem man die Zeitreihe in Delaykoordinaten aufträgt.

Anders formuliert: Wichtige Eigenschaften der Attraktoren sind nicht vom Koordinatensystem abhängig.

3.1 Attraktoren bei fixierten Parametern

Die Betonung liegt hier deshalb auf *fixierten* Parametern, weil bei der Parametervariation, wie wir noch sehen werden, Bifurkationen auftreten können.

Von wesentlicher Bedeutung für die Beschreibung der qualitativen Eigenschaften von Attraktoren sind die sogenannten Lyapunov–Exponenten λ .

Lyapunov–Exponent

- ▲ **Lyapunov–Exponenten** Die Lyapunov–Exponenten λ (abgek. LE) eines dynamischen Systems geben die mittleren Wachstumsraten kleiner Störungen $q(t)$

$$\|q(t)\| \propto \exp(\lambda_i t)$$

in Richtung der verschiedenen Einheitsvektoren oder Hauptachsen an.

$$\lambda_k = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \log \frac{\delta x_k(\tau)}{\delta x_k(0)}$$

δx_k sei hierbei die k -te Komponente des Störvektors im n -dimensionalen Raum.

Positive Lyapunov–Exponenten λ_k bedeuten eine exponentielle Separation von den Anfangszuständen. Dieses Verhalten wird auch als chaotisch bezeichnet [Sch94] und die Bedingung $\lambda_1 > 0$ mit dem größten Lyapunov–Exponenten λ_1 zur mathematischen Definition von Chaos genutzt.

(vgl. Kumpf, 1996)

Die Vorzeichen des Spektrums der Realteile der Lyapunov–Exponenten geben Aufschluß über die qualitativen Eigenschaften des Attraktors: Gibt es nur Lyapunov–Exponenten mit negativem Realteil, handelt es sich um einen Punktattraktor. Ein verschwindender Lyapunov–Exponent $\lambda = 0$ und ansonsten nur negative LE ergeben einen Grenzzyklus. Ein chaotischer Attraktor ist dagegen immer durch mindestens einen positiven, einen verschwindenden und einen negativen Lyapunov–Exponenten gekennzeichnet. Das bedeutet, daß Störungen in (mindestens) eine Raumrichtung expandieren, in (mindestens) eine andere kontrahieren und sich in einer Richtung neutral verhalten.

Das dynamische Verhalten eines chaotischen Systems wird primär von seinem größten positiven Lyapunov–Exponenten bestimmt. Auch die meisten numerischen Methoden beschränken sich auf diesen LE, da es prinzipielle Schwierigkeiten gibt, Kontraktionen im Phasenraum mit endlicher numerischer Auflösung nachzuweisen und zu quantifizieren. (vgl. Kumpf, 1996)

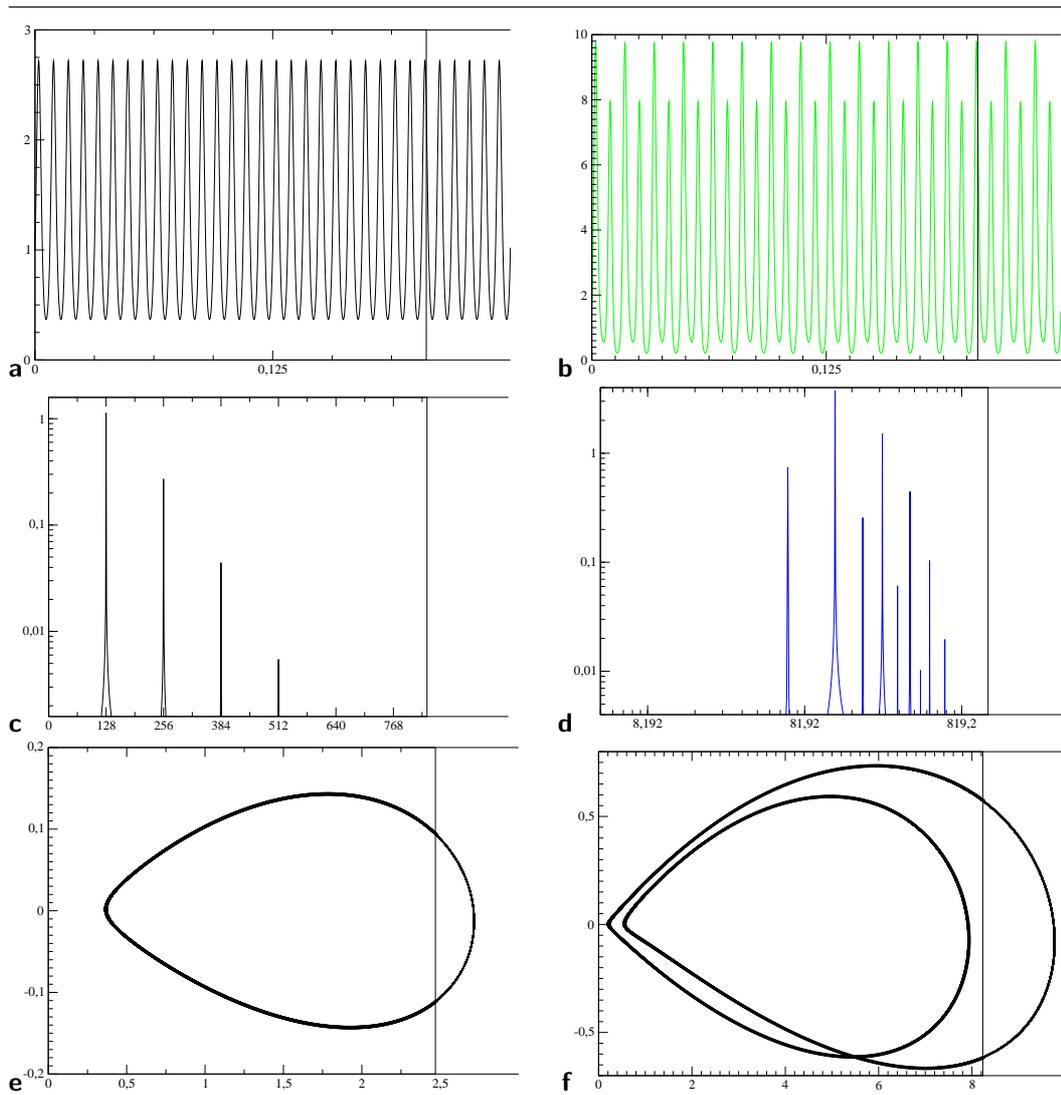


Abbildung 3.3: Phasenraumrekonstruktion eines Grenzyklus und eines gefalteten Grenzyklus. Links von oben nach unten die Zeitreihe, das Amplitudenspektrum der Fouriertransformation und der Grenzyklus im $x-\dot{x}$ -Pseudophasenraum für den normalen Grenzyklus (Zeitreihe mit nur einer Periode). Rechts daneben das gleiche für den gefalteten Grenzyklus einer Zeitreihe mit zwei Frequenzen, die in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen.

Des weiteren können Attraktoren auch durch ihre Dimension, die sogenannte Attraktordimension, klassifiziert werden.

▲ **Attraktordimension** Als Attraktordimension D bezeichnet man die Zahl der (lokalen) Ausdehnungen des Attraktors. Für einen Fixpunkt ist $D = 0$, für einen Grenzyklus $D = 1$ und für einen Torus mit zwei Frequenzen $D = 2$. Fraktale Attraktoren weisen eine nichtganzzahlige (fraktale) Dimension $D > 2$ auf.

*Attraktor-
dimension*

3.1.1 Klassifikation bekannter Attraktoren

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über wichtigsten Attraktoren dynamischer Systeme sowie die Vorzeichen der zugehörigen Lyapunov-Exponenten und die Attraktordimension. Außerdem sind Beispiele für Systeme mit solchen

Attraktoren aufgeführt.

Bezeichnung	Lyapunov–Exp.	Dimension	Beispiele
stabiler stationärer Punkt	$\lambda_i < 0$ Realteile der Eigenwerte der Jacobi–Matrix	0	Stimmklappen (Aphonie), erregbare Zellen, Homöostase, laminare Strömung, Populationsgleichgewicht
Grenzyklus (selbsterregte Schwingung)	$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \dots$ $\lambda_1 = 0$	1	Phonation, Sinusknoten, Atemgenerator, circadiane Uhr, glykolytischer Oszillator
n–Torus (Überlagerung von n Schwingungen mit inkommensurabilem Verhältnis)	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $\lambda_3, \lambda_4 \dots < 0$	n	Vibrato, respirat. Sinusarrhythmie (RSA), Biphonation
chaotischer Attraktor	$\lambda_1 > 0$	fraktal	Lorenz–System

Der stabile stationäre Punkt (Fixpunkt) kann in zwei Formen auftreten: als stabiler Knoten, in den die Trajektorien aus allen Richtungen direkt hineinfließen, oder als stabiler Strudel. Im letzteren Fall beschreiben die Trajektorien Spiralbahnen um den Attraktor.

Der Grenzyklus kommt ebenfalls in verschiedenerlei Gestalt vor, je nach Eigenschaft der Schwingung: Für eine reine harmonische Schwingung erscheint er als exakter Kreis, für eine Relaxationsschwingung oder jede andere verzerrte Schwingung verformt und für mehrere Schwingungen, die in einem rationalen (kommensurablen) Verhältnis zueinander stehen, als gefalteter Grenzyklus (vgl. auch Abb. 3.3).

3.1.2 Poincaré–Abbildung

*Poincaré–
Abbildung*

Ein weiteres sehr wichtiges Hilfsmittel für die Analyse der Dynamik insbesondere höherdimensionaler Systeme ($D > 2$) ist die Poincaré–Abbildung, auch Poincaré–Schnitt genannt. Dabei wird ein Attraktor mit einer Ebene geschnitten und man betrachtet nur noch die Durchstoßpunkte der Trajektorien (Ebeling et al., 1990). Das führt im Falle eines 2er–Torus zu einer geschlossenen Kurve, aber auch niedrigdimensionale chaotische Attraktoren führen oft auf nahezu eindimensionale Kurven.

Mit der Poincaré–Abbildung nahe verwandt sind stroboskopische Abbildungen. Hier wird zweckmäßigerweise die Folge von Phasenraumpunkten im Abstand einer Erregerperiode analysiert (Ebeling et al., 1990). Ein Beispiel einer solchen Abbildung ist in Abb. 3.4d zu sehen.

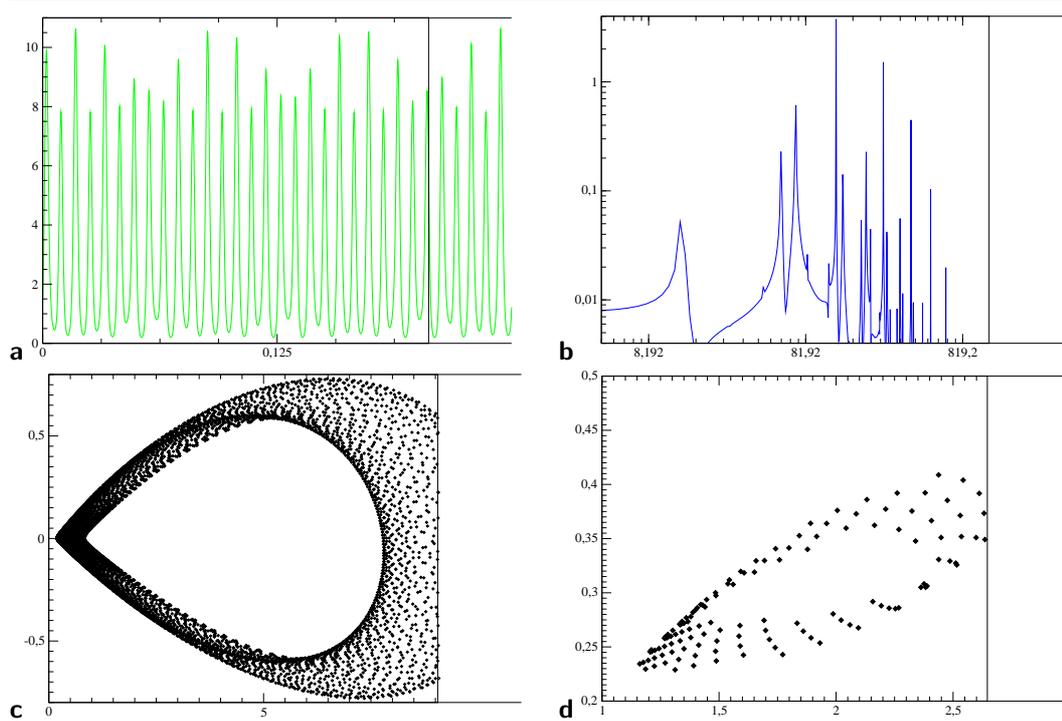


Abbildung 3.4: Phasenraumrekonstruktion eines Torus. Links oben ein Ausschnitt aus der Zeitreihe, in dem die beiden inkomensurablen (in einem irrationalen Verhältnis zueinander stehenden) Perioden erkennbar sind. Rechts daneben das Amplitudenspektrum der Fouriertransformation der Zeitreihe. Links unten dann die Darstellung des Torus im zweidimensionalen $x-\hat{x}$ -Pseudophasenraum. Auch wenn für die Abbildung eines Torus mindestens ein dreidimensionaler Phasenraum notwendig ist, gibt diese Darstellung schon einen guten Eindruck von der dreidimensionalen Gestalt des Torus. Rechts daneben dann eine dem Poincaré-Schnitt ähnliche stroboskopische Abbildung des Torus.

3.2 Bifurkationen bei Parametervariationen (quasistatisch)

Wie schon erwähnt, gibt es drei zentrale Begriffe in der nichtlinearen Dynamik: Phasenraum (*phase space*), Attraktor (*attractor*) und Bifurkation (*bifurcation*). Die Definition des Begriffes Bifurkation sei hier noch einmal wiederholt:

▲ **Bifurkation** *bifurcation* Unter Bifurkation versteht man die qualitative Änderung der Attraktoren und ihrer Einzugsgebiete (Bassins) bei Parametervariation. Am Bifurkationspunkt μ_{cr} , dem kritischen Punkt des Bifurkationsparameters μ , ändert sich die Zahl und/oder die Stabilität der Fixpunkte des Systems sprunghaft.

Im Folgenden werden drei Bifurkationstypen näher beschrieben:

1. Heugabel-Bifurkation (*pitch fork bifurcation*)

Ein stabiler Fixpunkt geht in zwei stabile Fixpunkte (und meist einen instabilen Fixpunkt) über.

2. Sattel-Knoten-Bifurkation (*saddle node bifurcation*)

Ein instabiler Sattel und ein stabiler Knoten gehen ineinander über und verschwinden.

3. HOPF–Bifurkation (*Hopf bifurcation*)

Ein stabiler Fixpunkt geht in einen stabilen Grenzzyklus über.

3.2.1 Heugabel–Bifurkation

Für ein anschauliches Verständnis der Heugabel–Bifurkation betrachten wir ein dynamisches System

$$\dot{x} = f(x(t), t) \tag{3.1}$$

Das einfachste System, das eine Heugabel–Bifurkation aufweist, hat als Bewegungsgleichung (Differentialgleichung in Normalform)

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \quad (x, \mu \in \mathbb{R}) \tag{3.2}$$

mit dem Bifurkationsparameter μ . Die Beschränkung von dynamischer Variable x und Bifurkations– oder Kontrollparameter μ auf den reellen Zahlenraum ist durch die physikalische (und biologische) Anwendbarkeit motiviert.

Zunächst werden die stationären Lösungen der Differentialgleichung Gl. (3.2) gesucht, deren Stabilitätsverhalten anschließend mittels linearer Stabilitätsanalyse untersucht werden soll.

Die stationäre Lösung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{x} = 0 & \Leftrightarrow 0 = \mu x - x^3 \\ & \Leftrightarrow x_0^{(1)} = 0 \quad \wedge \quad x_0^{(2/3)} = \pm\sqrt{\mu} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Da wir x und μ nur für reelle Werte definiert haben, existieren die Fixpunkte $x_0^{(2/3)}$ nicht für $\mu < 0$.

Für die lineare Stabilitätsanalyse muß die Differentialgleichung zunächst für kleine Auslenkungen $\delta x = x - x_0$ linearisiert werden. Im allgemeinen Fall lautet die linearisierte Differentialgleichung:

*linearisierte
Differential-
gleichung*

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right)_{x_0} \delta x_k \quad \Leftrightarrow \quad \delta \dot{x} = \mathbf{J}_{x_0} \delta x \tag{3.4}$$

mit der Jacobi–Matrix \mathbf{J} . Für den vorliegenden Fall ergibt sich Gl. (3.4) zu

$$\delta \dot{x} = \left(\frac{\partial}{\partial x} (\mu x - x^3) \right)_{x_0} \delta x = (\mu - 3x_0^2) \delta x \tag{3.5}$$

Die Determinante $\det(\mathbf{J})$ der Jacobimatrix \mathbf{J} ist also $\det(\mathbf{J}) = \mu - 3x^2$.

Betrachten wir nun den ersten Fixpunkt $x_0^{(1)}$ und die zugehörige linearisierte Differentialgleichung:

$$x_0^{(1)} = 0 \quad \delta \dot{x} = \mu \delta x \tag{3.6}$$

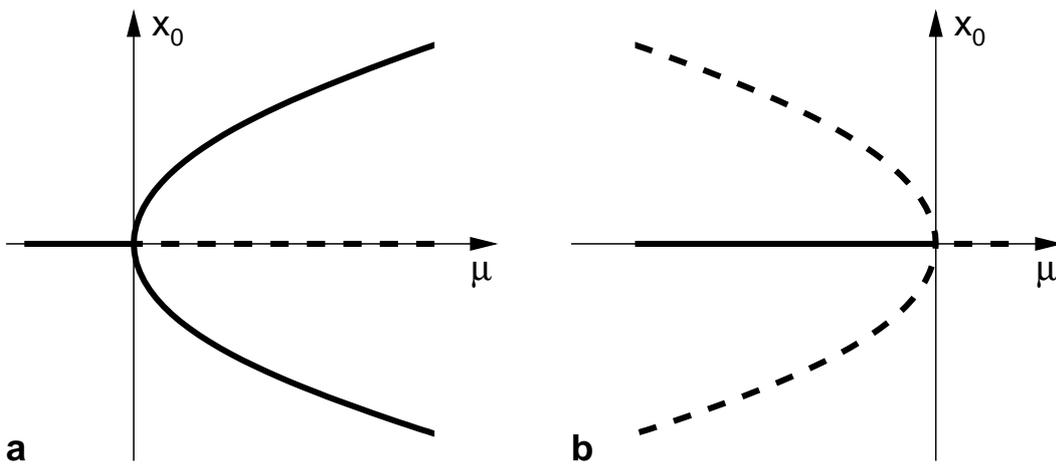


Abbildung 3.5: Bifurkationsdiagramm der Heugabel-Bifurkation (*pitch-fork bifurcation*). Dargestellt ist der Fixpunkt x_0 als Funktion des Bifurkationsparameters μ . (a) Superkritische Heugabel-Bifurkation mit der dynamischen Gleichung $\dot{x} = \mu x - x^3$. Der Fixpunkt $x_0^{(2/3)} = \pm\sqrt{\mu}$ ist stabil, da $\mu > 0$. (b) Subkritische Heugabel-Bifurkation mit der dynamischen Gleichung $\dot{x} = \mu x + x^3$. Der Fixpunkt $x_0^{(2/3)} = \pm\sqrt{-\mu}$ ist instabil, da $\mu < 0$.

Die allgemeine Lösung dieser linearisierten Differentialgleichung lautet:

$$\delta x(t) = A \cdot \exp(\mu t) \quad \begin{cases} \text{stabil für} & \mu < 0 \\ \text{instabil für} & \mu > 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Analog gelten für den zweiten und dritten Fixpunkt $x_0^{(2/3)}$ und die zugehörige linearisierte Differentialgleichung

$$x_0^{(2/3)} = \pm\sqrt{\mu} \quad \delta \dot{x} = \left(\mu - 3(\pm\sqrt{\mu})^2 \right) \delta x = 2\mu \delta x \quad (3.8)$$

Für beide Fixpunkte gilt also dieselbe linearisierte Differentialgleichung. Ihre allgemeine Lösung lautet:

$$\delta x(t) = A \cdot \exp(-2\mu t) \quad (3.9)$$

Sie ist stabil, da gilt: $\mu > 0$ (wegen der Bedingung $\mu \in \mathbb{R}$). Für eine graphische Darstellung des Verhaltens des Systems in der Nähe der Fixpunkte vor und

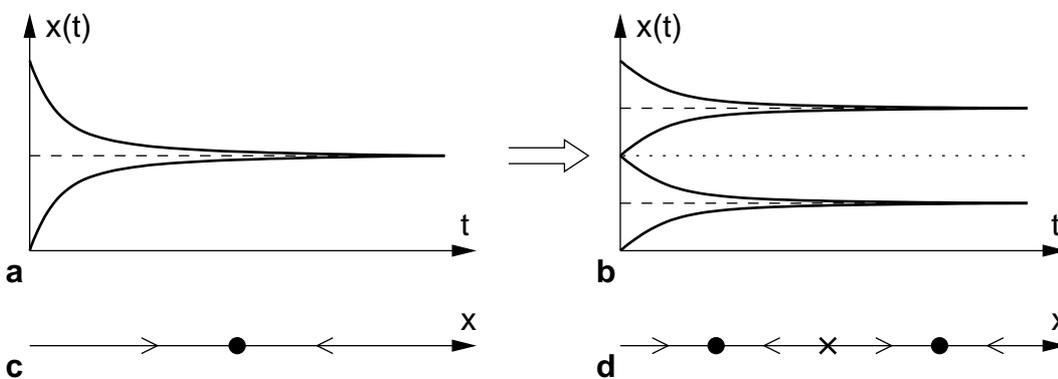


Abbildung 3.6: Zeitbereich und Phasenraum einer Heugabel-Bifurkation (*pitch-fork bifurcation*). Dargestellt ist jeweils die Variable x als Funktion der Zeit t und die Variable x im Phasenraum mit der Stabilität des Fixpunktes. (a) und (c) Verhalten des Systems vor der Bifurkation; (b) und (d) Verhalten des Systems nach der Bifurkation. Stabile Fixpunkte sind durch \bullet , instabile Fixpunkte durch \times gekennzeichnet.

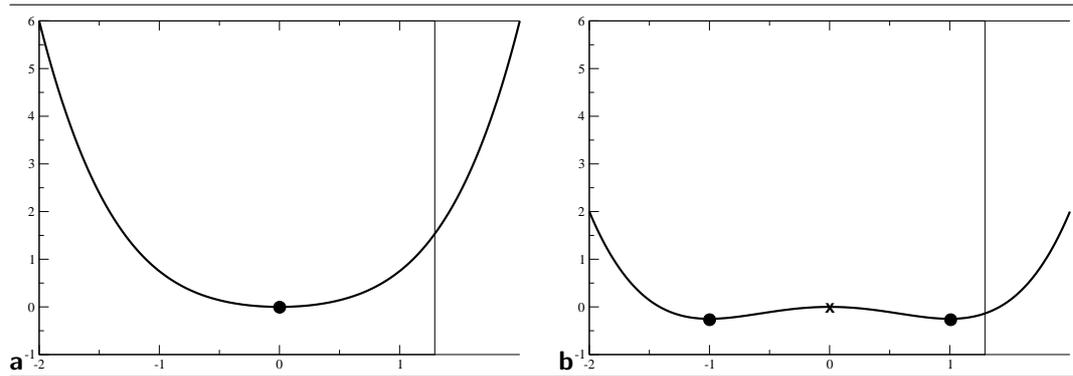


Abbildung 3.7: Potentialdarstellung einer Heugabel–Bifurkation (*pitch–fork bifurcation*). Dargestellt ist jeweils das Potential $V(x)$ als Funktion der Variable x , $V(x) = -\frac{\mu}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$. (a) Potential für $\mu < 0$ (hier $\mu = -1$). Das entspricht dem Verhalten des Systems vor der Bifurkation. (b) Potential für $\mu > 0$ (hier $\mu = 1$). Das entspricht dem Verhalten des Systems nach der Bifurkation. Stabile Fixpunkte sind durch \bullet , instabile Fixpunkte durch \times gekennzeichnet.

nach der Bifurkation vgl. Abb. 3.6. Eine Auftragung des Bifurkations– oder Kontrollparameters μ gegen die Lage der Fixpunkte x_0 liefert Abb. 3.5.

Zusammengefaßt können wir festhalten: Der Fixpunkt $x_0^{(1)} = 0$ ist stabil für $\mu < 0$ (stabiler Knoten) und instabil für $\mu > 0$. Die beiden anderen Fixpunkte $x_0^{(2/3)} = \pm\sqrt{\mu}$ sind stabil, da $\mu > 0$ (stabiler Knoten). Sie existieren nicht für $\mu < 0$, da dann die Bedingung $x_0 \in \mathbb{R}$ nicht mehr gegeben wäre (vgl. Gl. 3.8).

Potential

Eine anschauliche Darstellung des Verhaltens der Fixpunkte im Eindimensionalen erhält man durch die graphische Darstellung des Potentials $V(x)$. Es ist für eine gegebene Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ gegeben durch:

$$V(x) = - \int f(x)dx \tag{3.10}$$

Im vorliegenden Beispiel mit dem dynamischen System nach Gl. (3.2) lautet die Gleichung für das Potential $V(x)$

$$V(x) = -\frac{\mu}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 \tag{3.11}$$

Für eine graphische Darstellung des Potentials für das gegebene System vgl. Abb. 3.7.

Eine Heugabel–Bifurkation ist also gleichbedeutend mit dem Übergang eines Systems von der Mono– zur Bistabilität. Allgemeine Beispiele für eine solche Bistabilität sind ein Kippschalter oder der Schmitt–Trigger. In biologischen Systemen gibt es ebenfalls bistabiles Verhalten. Beispiele sind hier: Lambda–Phagen (lytischer/lysogener Zyklus), das X–Chromosom bei weiblichen Säugertieren (eines wird als BARR–Körperchen inaktiviert), die gegenseitige Inhibierung (z.B. Immunbiologie: Entwicklung der Antikörper) oder sogenannte Checkpoints z.B. im Zellzyklus.

3.2.2 Sattel–Knoten–Bifurkation

Wie schon bei der Heugabel–Bifurkation wollen wir auch bei der Sattel–Knoten–Bifurkation wieder ein dynamisches System nach Gl. (3.1) betrachten. Das ein-

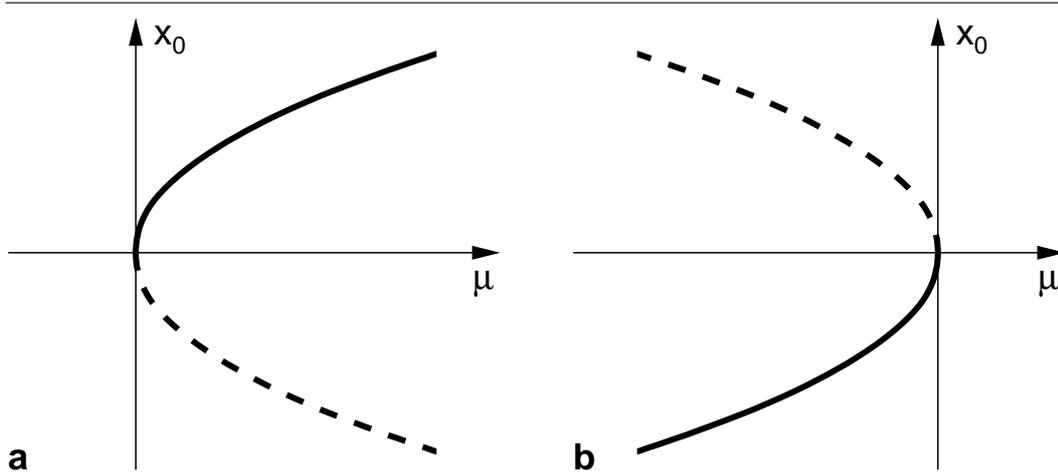


Abbildung 3.8: Sattel-Knoten-Bifurkation (*saddle-node bifurcation*). Dargestellt ist der Fixpunkt x_0 als Funktion des Bifurkationsparameters μ . (a) Superkritische Sattel-Knoten-Bifurkation mit der dynamischen Gleichung $\dot{x} = \mu - x^2$. Der Fixpunkt $x_0^{(1)} = \sqrt{\mu}$ ist stabil, $x_0^{(2)} = -\sqrt{\mu}$ instabil. (b) Subkritische Sattel-Knoten-Bifurkation mit der dynamischen Gleichung $\dot{x} = \mu + x^2$. Der Fixpunkt $x_0^{(1)} = \sqrt{-\mu}$ ist instabil, $x_0^{(2)} = -\sqrt{-\mu}$ stabil.

fachste solche System, das eine Sattel-Knoten-Bifurkation bei Variation des Kontrollparameters μ zeigt, ist gegeben durch

$$\dot{x} = \mu - x^2 \quad (x, \mu \in \mathbb{R}) \quad (3.12)$$

Auch hier werden wieder zunächst die stationären Lösungen der Differentialgleichung gesucht, um anschließend Aussagen über ihre Stabilität via linearer Stabilitätsanalyse treffen zu können. Die stationäre Lösung des Systems nach Gl. (3.12) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{x} = 0 & \Leftrightarrow 0 = \mu - x^2 \\ & \Leftrightarrow x_0^{(1)} = \sqrt{\mu} \quad \wedge \quad x_0^{(2)} = -\sqrt{\mu} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Da sowohl die dynamische Variable x als auch der Kontrollparameter μ reell gewählt wurden, existieren für $\mu < 0$ keine Lösungen und damit auch kein Fixpunkt.

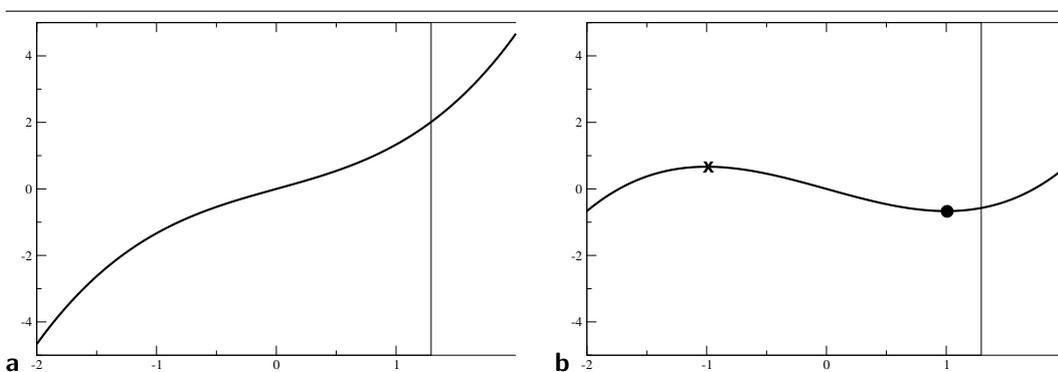


Abbildung 3.9: Potentialdarstellung einer Sattel-Knoten-Bifurkation (*saddle-node bifurcation*). Dargestellt ist jeweils das Potential $V(x)$ als Funktion der Variable x , $V(x) = -\mu x + \frac{1}{3}x^3$. (a) Potential für $\mu < 0$ (hier $\mu = -1$). Das entspricht dem Verhalten des Systems vor der Bifurkation. (b) Potential für $\mu > 0$ (hier $\mu = 1$). Das entspricht dem Verhalten des Systems nach der Bifurkation. Stabile Fixpunkte sind durch \bullet , instabile Fixpunkte durch \times gekennzeichnet.



Abbildung 3.10: Phasenportrait der Sattel–Knoten–Bifurkation (*saddle–node bifurcation*). (a) Phasenportrait für $\mu < 0$: Es existiert kein Fixpunkt. (b) Phasenportrait für $\mu > 0$: Es existiert ein instabiler (Sattel) und ein stabiler Fixpunkt. Stabile Fixpunkte sind durch \bullet , instabile Fixpunkte durch \times gekennzeichnet.

Für die lineare Stabilitätsanalyse werden wieder kleine Auslenkungen $\delta x = x - x_0$ betrachtet. Dazu wird die Differentialgleichung Gl. (3.12) gemäß Gl. (3.4) linearisiert werden:

$$\delta \dot{x} = \left(\frac{\partial}{\partial x} (\mu - x^2) \right)_{x_0} \delta x = -2x_0 \delta x \quad (3.14)$$

Die Determinante $\det(\mathbf{J})$ der Jacobi–Matrix \mathbf{J} ist also $\det(\mathbf{J}) = -2x$, das Problem eindimensional.

Die allgemeine Lösung dieser linearisierten Differentialgleichung lautet:

$$\delta x(t) = A \cdot \exp(-2x_0 t) \quad (3.15)$$

durch Einsetzen von Gl. (3.13) ergibt sich für die beiden Fixpunkte:

$$\delta x(t) = \begin{cases} A \cdot \exp(-2\sqrt{\mu}t) & \text{für } x_0^1 = \sqrt{\mu} \\ A \cdot \exp(2\sqrt{\mu}t) & \text{für } x_0^1 = -\sqrt{\mu} \end{cases} \quad (3.16)$$

Die Begriffe “Sattelpunkt” und “stabiler Knoten” sind nur für mehrdimensionale Probleme sinnvoll. Im Mehrdimensionalen existiert mindestens ein weiterer, stets negativer Eigenwert λ . Im hier der Einfachheit halber diskutierten eindimensionalen Fall können die Aussagen zur Stabilität durch Betrachtung der Lösungen der linearisierten Differentialgleichung anschaulich gemacht werden: Die Lösung der linearisierten Differentialgleichung ergibt für den ersten Fixpunkt $x_0^{(1)} = \sqrt{\mu}$ eine fallende Exponentialfunktion. D.h. dieser Fixpunkt ist stabil (allgemein: ein stabiler Knoten). Für den zweiten Fixpunkt $x_0^{(2)} = -\sqrt{\mu}$ ergibt sich dagegen eine ansteigende Exponentialfunktion. Dieser Fixpunkt ist demzufolge instabil. Diese Betrachtung ist konsistent mit den Ergebnissen der linearen Stabilitätsanalyse.

Eine Auftragung der Fixpunkte x_0 über dem Kontrollparameter μ ist in Abb. 3.8 dargestellt. Wie schon für die Heugabel–Bifurkation kann auch für die Sattel–Knoten–Bifurkation eine Potentialdarstellung durch Auftragung des Potentials $V(x)$

$$V(x) = -\mu x + \frac{1}{3}x^3 \quad (3.17)$$

gegen die dynamische Variable x zur Veranschaulichung des Systemverhaltens genutzt werden (vgl. Abb. 3.9). Das zugehörige Phasenportrait ist in Abb. 3.10 wiedergegeben.

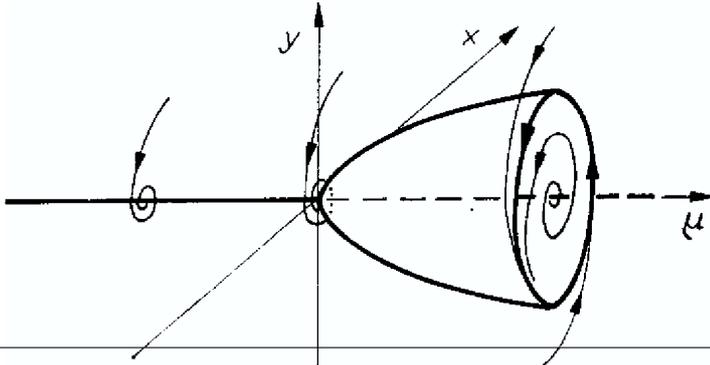


Abbildung 3.11: Hopf-Bifurkation (*Hopf bifurcation*). Dargestellt ist das dynamische System $\dot{r} = \mu r - r^3$ und $\dot{\varphi} = 1$ (in kartesischen Koordinaten: $\dot{x} = \mu x - y - (x^2 + y^2)x$ und $\dot{y} = \mu y - x - (x^2 + y^2)y$) in der Auftragung der beiden dynamischen Variablen x, y gegen den Kontrollparameter μ . Gut zu sehen ist, daß für dieses System der Fixpunkt für $\mu < 0$ in einen Grenzzyklus für $\mu > 0$ übergeht. Dieses Verhalten ist das Charakteristikum einer Hopf-Bifurkation.

3.2.3 Hopf-Bifurkation

Die Hopf-Bifurkation ist benannt nach dem deutschen Mathematiker Hopf, der diesen Bifurkationstyp 1942 erstmalig vorstellte (Hopf, 1942). Sie ist definiert als Bifurkation eines Fixpunktes zu einem Grenzzyklus (Weisstein, 1999b).

Es handelt sich dabei um einen komplizierteren Bifurkationstyp als die beiden zuvor beschriebenen (Sattel-Knoten- und Heugabel-Bifurkation). Wesentliche Bedingungen für das Auftreten einer Hopf-Bifurkation sind, daß das dynamische System aus mindestens zwei Komponenten besteht und die Jacobi-Matrix \mathbf{J} zwei konjugiert komplexe Eigenwerte besitzt.

Ein einfaches Beispiel für ein dynamisches System, bei dem eine Hopf-Bifurkation auftritt, ist

$$\dot{x} = \mu x - y - (x^2 + y^2)x \quad \text{I} \quad (3.18)$$

$$\dot{y} = \mu y - x - (x^2 + y^2)y \quad \text{II} \quad (x, y \in \mathbb{R}) \quad (3.19)$$

Zur weiteren Analyse des Systems bietet sich die Transformation auf Polarkoordinaten an:

$$x = r \cos(\varphi) \quad y = r \sin(\varphi) \quad (3.20)$$

Aus den Linearkombinationen

$$\text{I} \cdot \cos(\varphi) + \text{II} \cdot \sin(\varphi) \quad -\text{I} \cdot \sin(\varphi) + \text{II} \cdot \cos(\varphi) \quad (3.21)$$

ergeben sich die entkoppelten Differentialgleichungen

$$\dot{r} = \mu r - r^3 \quad \text{und} \quad \dot{\varphi} = 1 \quad (3.22)$$

Durch Vergleich mit Gl. (3.2) fällt auf, daß die Differentialgleichung für r die gleiche Form hat wie die Differentialgleichung der Heugabel-Bifurkation. Entsprechend können also die Lösungen für $r \geq 0$ übernommen werden. Da die zeitliche Ableitung $\dot{\varphi}$ des Winkels φ konstant ist, können hier keine stationären Lösungen und damit auch keine Bifurkationen geben.

Der erste Fixpunkt ergibt sich damit analog zu dem der Heugabel–Bifurkation zu:

$$r_0^{(1)} = 0 \quad \wedge \quad \dot{\varphi} = 1 \quad (3.23)$$

mit der zugehörigen linearisierten Differentialgleichung

$$\delta r(t) = A \cdot \exp(\mu t) \quad \begin{cases} \text{stabil für} & \mu < 0 \\ \text{instabil für} & \mu > 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Für die beiden anderen Fixpunkte $r_0^{(2/3)}$ gilt:

$$r_0^{(2/3)} = \pm\sqrt{\mu} \quad \wedge \quad \dot{\varphi} = 1 \quad (3.25)$$

mit der zugehörigen linearisierten Differentialgleichung

$$\delta r(t) = A \cdot \exp(-\mu t) \quad (3.26)$$

Diese beiden Fixpunkte sind stabil, da gilt $\mu > 0$. Die Auftragung der Fixpunkte r_0 gegen den Kontrollparameter μ ergeben das gleiche Bild wie für die Heugabel–Bifurkation (vgl. Abb. 3.6). Werden stattdessen die beiden dynamischen Variablen x und y gegen den Kontrollparameter μ aufgetragen, erhalten wir die dreidimensionale Darstellung nach Abb. 3.11, in der deutlich zu erkennen ist, wie der stabile Fixpunkt für $\mu < 0$ zu einem stabilen Grenzzyklus für $\mu > 0$ wird.

3.2.4 Beispiele komplizierterer Bifurkationen

Ein Beispiel einer komplizierteren Bifurkation ist die **Sattel–Knoten–Bifurkation von Grenzzyklen**, wie sie bei einem getriebenen Oszillator (nichtlineares System) bei nichtlinearer Rückstellkraft auftritt. Hier verschmelzen ein stabiler und ein instabiler Grenzzyklus miteinander.

Kapitel 4

Logistische Gleichung und Lorenz–Modell

4.1 Logistische Abbildung

Die logistische Abbildung (*quadratic map*) ist ein diskretes dynamisches System mit einer Variable x , das durch die Abbildung

*logistische
Abbildung*

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) = f(x_n) \quad (4.1)$$

bestimmt wird. x_n, x_{n+1} sind Werte der Variablen in aufeinanderfolgenden Schritten, r ist ein Parameter. Sie ist eines der einfachsten Beispiele für ein nichtlineares diskretes dynamisches System. (Stöcker, 1998) Eine Anwendung dieser Abbildung ist die Modellierung von Insektenpopulationen ohne Generationsüberlappung.

Der **Bifurkationsparameter** der logistischen Abbildung ist der Parameter r . Für $0 < r < 1$ gibt es nur einen (gleichzeitig stabilen) Fixpunkt $x^* = 0$ (das entspricht einem Aussterben der Population). Für $1 < r < 3$ lautet der stabile Fixpunkt $x^* = 1 - \frac{1}{r}$. Im Bereich $3 < r < 3.57$ PD-Kaskade¹ und für Werte von $3.57 < r \leq 4$ zu einer ganzen Reihe von Phänomenen wie

¹Periodenverdoppelungs-Kaskade, *period doubling cascade*

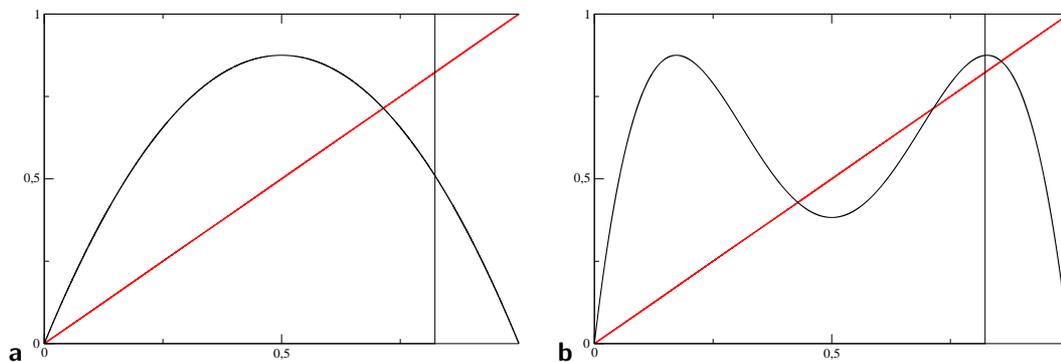


Abbildung 4.1: Erste und zweite Iterierte der logistischen Abbildung $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ für $r = 3.5$.

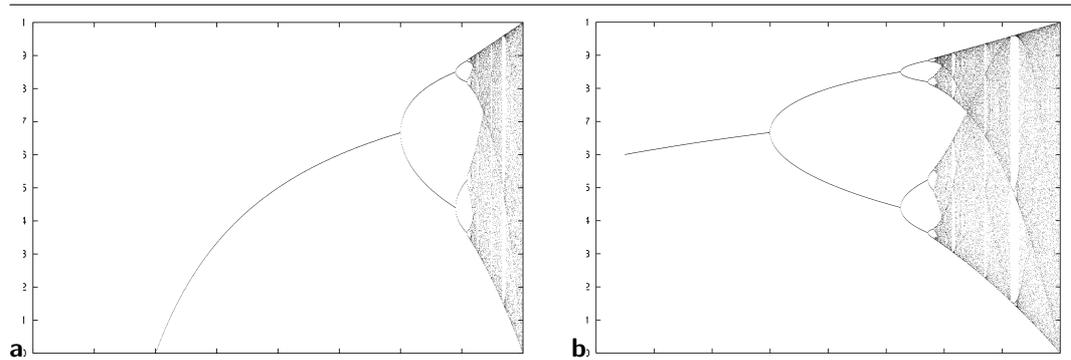


Abbildung 4.2: Bifurkationsdiagramm der logistischen Abbildung. Aufgetragen sind die Funktionswerte $f(x_n)$ gegen den Parameter r der logistischen Gleichung für jeweils 1000 Iterationen. Deutlich sichtbar sind die Periodenverdoppelungs-Kaskaden (*period doubling cascades*) für $r \geq 2$, die Fenster und neuerliche Periodenverdoppelungs-Kaskaden. (a) Bifurkationsdiagramm für den gesamten Parameterraum $0 \leq r \leq 4$; (b) Ausschnitt für $2.5 \leq r \leq 4$.

FEIGENBAUM-Szenario

Chaos, Fenster, PD-Kaskaden, Intermittenz². Die PD-Kaskaden werden auch als FEIGENBAUM-Szenario bezeichnet.

- Bei kontinuierlichen Systemen ist es verboten, die Trajektorien zu schneiden, bei iterierten Abbildungen dagegen erlaubt.

4.2 Lorenz-Modell

In Verbindung mit dem Problem der Wettervorhersage hat Lorenz (1963) nicht-periodische Lösungen deterministischer Gleichungen eines hydrodynamischen Modells der Benard-Konvektion untersucht. Im Anschluß an Saltzman (Saltzman, 1962) geht er von Konvektionsgleichungen aus, die unter den Voraussetzungen der Inkompressibilität und der „Boussineq-Approximation“ aus den Navier-Stokes-Gleichungen (Impuls), der Wärme-Diffusionsgleichung (Energie) und der Kontinuitätsgleichung (Masse) folgen (Swinney und Gollub, 1981; Haken, 1975; Mc Laughlin und Martin, 1975).

Lorenz-System

Das System

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \quad \dot{y} = rx - y - xz \quad \dot{z} = xy - bz \quad (4.2)$$

heißt *LORENZ-System der konvektiven Turbulenz*. Dabei sind $\sigma > 0, r > 0$ und $b > 0$ Parameter. Das LORENZ-System besitzt für $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r = 28$ einen Attraktor Λ (*LORENZ-Attraktor*) mit der numerisch ermittelten Dimension $d_H(\Lambda) \approx 2.06$. (Bronstein et al., 1999)

Es liefert eine stark vereinfachte Beschreibung der Konvektion einer flachen Flüssigkeitsschicht, der einseitig Wärme zugeführt wird, mit der Temperaturdifferenz ΔT (in Gl. (4.2) der Parameter r) als Bifurkationsparameter. Typische Parameterwerte sind:

$$\sigma = 10 \quad b = \frac{8}{3} \quad r \propto \Delta T$$

²Abwechslung von regulärem und chaotischem Verhalten

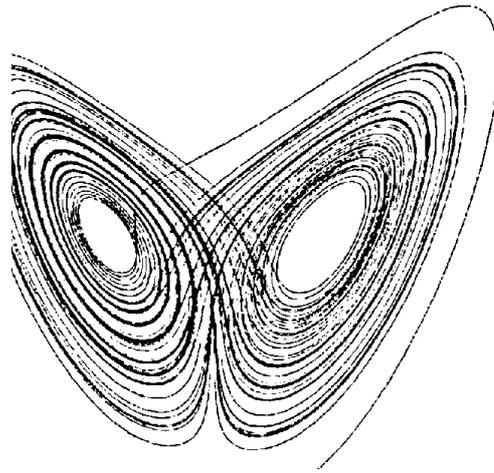


Abbildung 4.3: Der Lorenz-Attraktor, wie er für das System $\dot{x} = \sigma(y-x)$, $\dot{y} = rx-y-xz$, $\dot{z} = xy-bz$ für die Parameterwerte $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r = 28$ auftritt. Er ist charakterisiert durch spiralförmige Bahnen um die vormalig stabilen Fixpunkte des Systems.

Für unterschiedliche Temperaturdifferenzen ΔT lassen sich verschiedene physikalische Phänomene beobachten: Für kleine ΔT herrscht Wärmeleitung vor, bei zunehmenden Werten von ΔT bilden sich Konvektionszellen (Konvektionsrollen) heraus, und für große ΔT geht das System schließlich zur Turbulenz über.

Mathematisch lassen sich diese Phänomene für unterschiedliche Werte des Kontrollparameters (Bifurkationsparameters) r nachvollziehen. Für $0 < r < 1$ existiert ein stabiler Fixpunkt des Systems bei $(0, 0, 0)$, also im Koordinatenursprung. Das entspricht physikalisch der Wärmeleitung durch das System. Für $1 < r < 24.74$ wird das System bistabil, es existieren zwei Fixpunkte (stabile Strudel, Konvektionsrollen). Für $r > 24.74$ geht das System schließlich zu chaotischem Verhalten über. Das entspricht physikalisch der Turbulenz. Mathematisch treten u.a. Phänomene wie Chaos, Fenster, Intermittenz, PD-Kaskaden und transientes Chaos auf. Der für $r = 28$ entstehende Attraktor wird Lorenz-Attraktor (auch: Lorenz-Schmetterling) genannt (vgl. Abb. 4.3).

*Lorenz-
Attraktor*

Das System ist nicht für alle Werte von $r > 24.74$ chaotisch: Ähnlich dem Feigenbaum-Szenario für die logistische Abbildung existieren Bereiche mit stabilen periodischen Lösungen, die über Periodenverdoppelungs-Kaskaden in chaotische Bereiche übergehen. Allerdings treten die Periodenverdoppelungen beim Lorenz-System in Richtung abnehmender Werte des Parameters r auf. Die periodischen Lösungen sind Schleifen, die sich abwechselnd um die beiden instabilen Fixpunkte des Systems winden.

Für eine weiterführende Behandlung des Lorenz-Systems und seiner Eigenheiten sei auf Sparrow (1982) verwiesen.

Betrachtung nur der Maxima (topologisch äquivalent dem Poincaré-Schnitt)

$$\dot{z} \Leftrightarrow z = \frac{xy}{b}$$

Bestimmung der Maxima

$$z_{n+1} < z_n > z_{n-1}$$

Divergenz des Phasenraumflusses

$$\begin{aligned}\text{Div} &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 &= 0.91 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= -14.55 \\ V(t) &= V(0) \cdot e^{-13.66t}\end{aligned}$$

Fraktaler Attraktor mit der Dimension

$$\text{Dim} = 2 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_3|} \approx 2.06$$

- Biologisch sind Algorithmen (zur Schätzung von LE und fraktalen Dimensionen) verzichtbar. Grund: Biologische Daten sind meist nicht gut genug, um z. B. die (fraktalen) Dimensionen zu bestimmen (notwendige Genauigkeit: mind. 1%).

Kapitel 5

Nichtlineare Dynamik des Herzens

5.1 Grundlagen

- Erregung des Herzens
 - Sinus-Knoten
 - * Taktgeber ($50 \dots 150 \text{ min}^{-1}$), reguliert durch Sympathikus (ACh) und Vagus (Adrenalin)
 - AV-Knoten
 - * Atrioventrikularknoten, *atrioventricular node*
 - * oszillierend ($40 \dots 60 \text{ min}^{-1}$)
 - Myocard
 - * i. allg. nicht oszillierend, aber erregbar
- Membranen (Herz- und Nervenzellen)
 - stark ungleiche Ionenverteilung (Na außen, K innen)

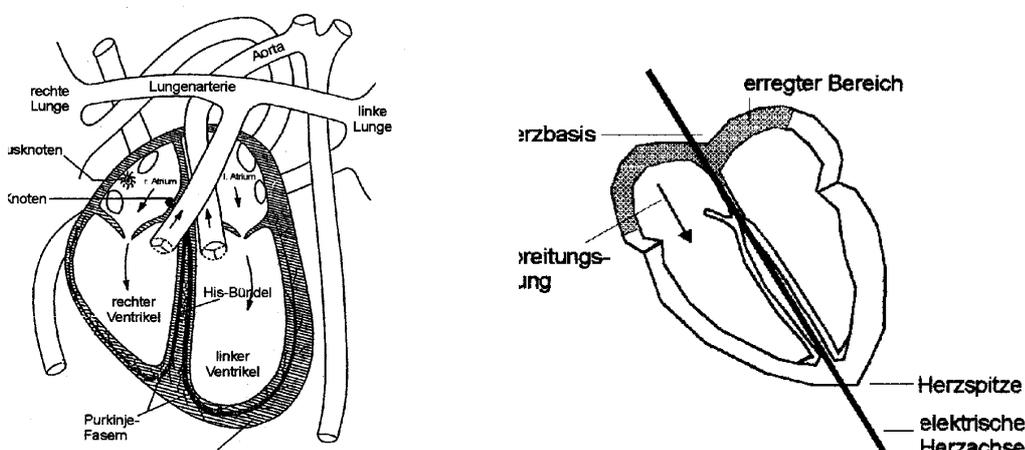


Abbildung 5.1: Das menschliche Herz: Anatomie und electrophysiologische Nomenklatur.

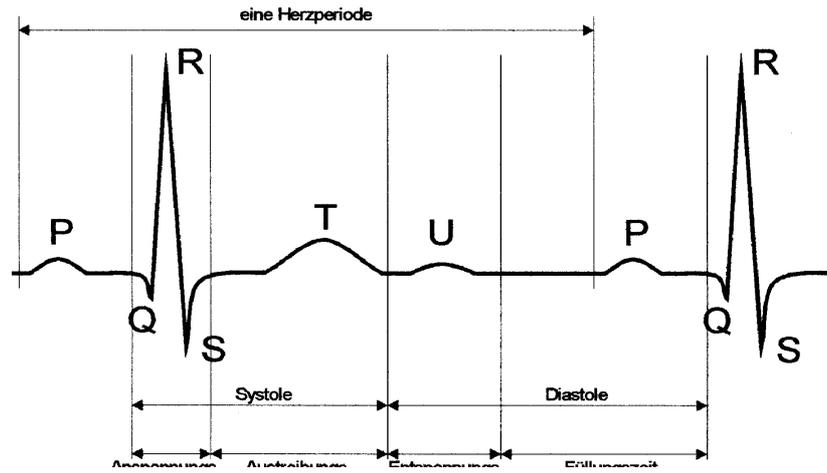


Abbildung 5.2: Der typische EKG-Verlauf mit den zugehörigen Herzrhythmen. Die P-Zacke entsteht während der Erregungsausbreitung in den Vorhöfen. Die Erregung breitet sich hier hauptsächlich in Richtung auf die Herzspitze aus. Nachdem die Vorhöfe vollständig erregt sind und die Erregung auf den AV-Knoten und das His-Bündel übersprungen ist, breitet sie sich kurzzeitig seitwärts aus und erzeugt somit die Q-Zacke unterhalb der Nulllinie. Anschließend breitet sich die Erregung in der Ventrikelmuskulatur wieder vorwiegend in Richtung auf die Herzspitze aus, wobei die mächtige R-Zacke oberhalb der Nulllinie entsteht. Die Erregung ergreift nun die Kammerwände und breitet sich dort kurzzeitig in Richtung auf die Basis aus (negative S-Zacke). Danach erfolgt die Ausbreitung in der Kammermuskulatur von innen nach außen, was nicht registriert wird, da dieser Vorgang quer zur elektrischen Herzachse stattfindet. Der Erregungsrückgang in der Kammermuskulatur erzeugt schließlich die T-Welle.

- Kanäle, Pumpen
 - Ruhepotential ≈ -65 mV
- Nernst-Gleichung

$$V_{ion} = \frac{RT}{zF} \ln \frac{C_{out}}{C_{in}}$$

- Refraktär-Phase
 - * bei allen erregbaren Medien wichtig
 - * ansonsten irreguläre Erregungen

EKG

• EKG

- mißt Spannungsdifferenzen an Körperoberflächen
- je nach Art der Ableitung unterschiedliche Form
- drei charakteristische Elemente
 1. P-Welle
 - * SA + Vorkammern
 2. QRS-Komplex
 - * Kontraktion der Ventrikel
 3. T-Welle

* Repolarisation

- einfaches Modell der Nervenzelle: HODGKIN–HUXLEY

$$I = C \frac{dV}{dt} + g_{\text{Na}}(V - V_{\text{Na}}) + g_{\text{K}}(V - V_{\text{K}}) + g_{\text{L}}(V - V_{\text{L}}) \quad g(V, t)$$

- zwei Ionensorten (Na, K) und Leckstrom (L)
- Vereinfachung: FITZHUGH–NAGUMO–Modell

- Herz: 10 Ionensorten relevant

– Modelle:

- * Ventrikel: BEELER und *Reuter* (7 DGL) Beeler und Reuter (1977)
- * SA: NOBLE, RUDY

5.2 Nichtlineare Dynamik

- Arrhythmien

– Brachykardie (langsame Herzrate)

- * nur Symptom
- * z.B. durch Ausfall des σ -Knotens verursacht

– Tachykardie (schnelle Herzrate)

- * z.B. Vorkammerflimmern als Mechanismus

– normale Herzvariabilität

- * insgesamt $\frac{1}{f}$ -Rauschen
 - mysteriösestes Rauschen/Spektrum in der Natur
- * RSA — respiratorische Sinus-Arhythmie
- * Mayer-Wellen \Leftrightarrow Blutregulation

$$\Delta S_{n+1} = K_0 \Delta S_n + K_1 \Delta S_{n+1} + \dots + \xi_n \quad \text{AR}(7)$$

→ Herzvariabilität ist etwas Gesundes

Daten weisen darauf hin, daß Probanden mit normaler Herzvariabilität gesünder/robuster sind als solche ohne

- Herzrhythmusstörungen

1. Wenckebach-Rhythmen (AV-Block)

- AV-Überleitung gestört/verlängert
- trotz P-Welle kein QRS-Komplex

2. Parasystolen

- abnormale Schrittmacher (ektopische Impulse, Extrasystolen) interferieren mit dem Sinus-Rhythmus
- zwei Formen

- (a) reine Parasystole
 - * beide Rhythmen unabhängig
 - * durch die Refraktärphase relativ komplizierte Dynamik
 - * aber: mathematisch berechenbar, mit der Zahlentheorie beschreibbar
- (b) modulierte Parasystole
 - * Interaktion mit dem Taktgeber
 - Bifurkationsdiagramm gekoppelter Oszillatoren

Kapitel 6

Gekoppelte Oszillatoren

Fast alle biomedizinischen Modellierungen sind mit gekoppelten Oszillatoren verbunden. Beispiele sind: konkurrierende Schrittmacher, Herz und Atmung, Motorik, Beatmung, linke und rechte Stimmlippe, circadiane Rhythmen. Bei letzteren gibt es drei verschiedene Koppelungen:

1. Koppelung der Zellen im SCN¹ aneinander
2. Koppelung des SCN an Herz/Leber/...
3. Koppelung des SCN an die Photoperiode

6.1 Phasenresponse–Kurve (PRC)

Ein wesentliches Hilfsmittel bei der Analyse circadianer Rhythmen ist die Phasenresponse–Kurve (*phase–response curve*, PRC). Sie geht zurück auf die Entdeckung von BÜNNING, RAWSON und DECOURSEY in den 30er Jahren des 20. Jahrhunderts, daß Licht die Phase einer circadianen Uhr setzen kann und daß es einen Tageszyklus der Empfindlichkeit des circadianen Rhythmus für die Lichtpulse gibt.

Eine erste Publikation einer Darstellung der Phasenverschiebung als Funktion der Phase des circadianen Rhythmus findet sich bei Hastings und Sweeney (1958). Für eine ausführliche Darstellung des Themas vgl. Johnson (1999).

▲ **Phasenresponse–Kurve** Eine Phasenresponse–Kurve (*phase–response curve*, PRC) ist eine graphische Darstellung der Phasenverschiebung eines circadianen Rhythmus als Funktion der circadianen Phase, die einem Stimulus (Zeitgeber) ausgesetzt ist. (Johnson, 1999) *Phasenresponse–Kurve (PRC)*

PRC können mathematisch unter der Annahme unmittelbarer (instantaner) radialer Relaxation über einen Grenzyklus und eine Auslenkung von diesem Grenzyklus weg in x -Richtung erklärt werden (vgl. Abb. 6.1). Ist der Stimulus dabei kleiner als der Grenzyklus, ergibt sich in der PRC eine geschlossene

¹SCN — *suprachiasmatic nuclei*, Ort der Circadianen Uhr der Säugetiere, Region im Hypothalamus

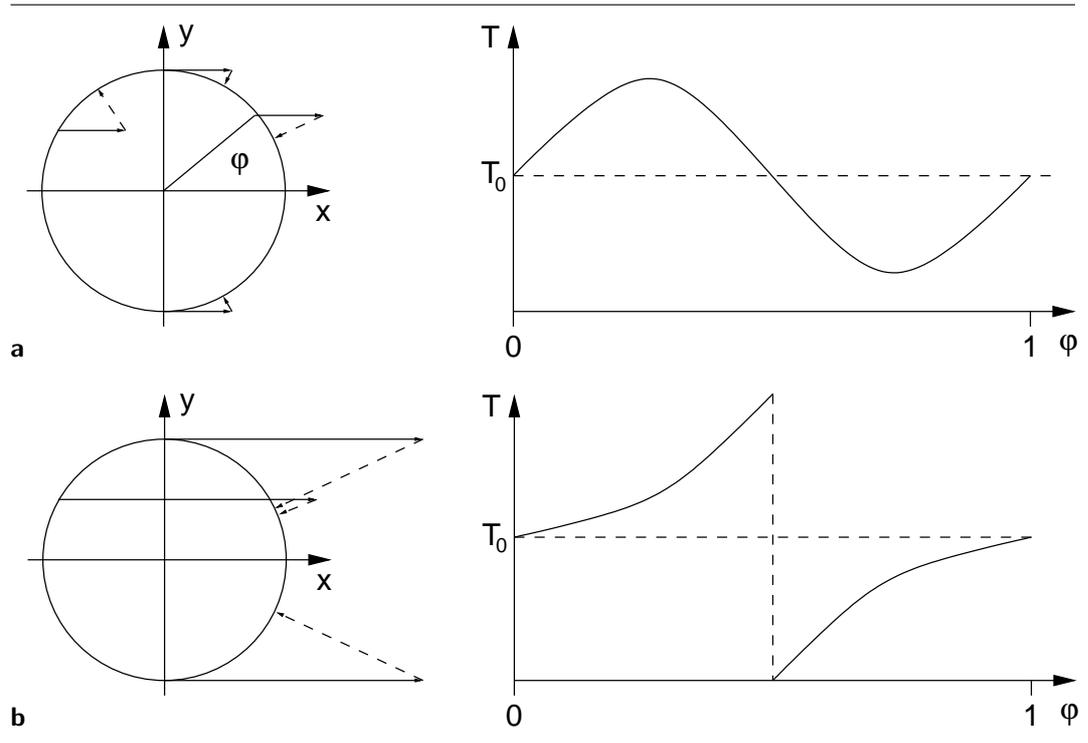


Abbildung 6.1: Erklärung der Phasenresponse-Kurven über die Auslenkung vom Einheitskreis in x -Richtung und unmittelbare radiale Relaxation. Aufgetragen ist die Phase φ gegen die Periodendauer T . Dabei ist T_0 die Dauer der Periode für die nichtstimulierte circadiane Schwingung. Im oberen Szenario (a) ist der Stimulus kleiner, im unteren (b) größer als der Grenzyklus. Ersterer Fall wird auch als Typ 1 PRC, letzterer als Typ 0 PRC bezeichnet.

Kurve. Man spricht auch von Typ 1 PRC. Bei einem Stimulus größer als der Grenzyklus ist die Kurve im PRC nicht mehr geschlossen (Typ 0 PRC).

- ▲ **Phasenübergangs-Kurve** Eine Phasenübergangs-Kurve (*phase-transition curve*, PTC) ist eine graphische Darstellung der “neuen Phase” eines circadianen Rhythmus nach dem Stimulus als Funktion der “ursprünglichen” circadianen Phase. (Die PRC ist dagegen die Auftragung der Phasenverschiebung gegen die ursprüngliche Phase.) (Johnson, 1999) Es handelt sich also um die Abbildung einer Phase auf sich selbst, was direkt zur Kreisabbildung (Sinusabbildung, *circle map*) führt.

6.2 Standardmodell der Kreisabbildung

Kreisabbildung

- ▲ **Kreisabbildung** *Sinusabbildung, circle map* Abbildung einer Phase auf sich selbst. Die eindimensionale Kreisabbildung (auch: Standardform der Kreisabbildung) ist definiert als

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\varphi_i) \tag{6.1}$$

mit dem Phasenvorschub (Frequenzverhältnis) Ω der Oszillatoren und der Koppelung K .

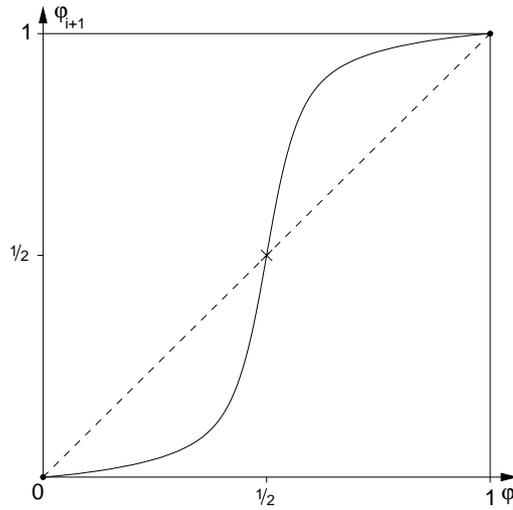


Abbildung 6.2: Phasenübergangskurve (*phase-transition curve*, PTC), “Kreisabbildung”. Abbildung einer Phase auf sich selbst. Aufgetragen ist die Phase vor dem Stimulus (φ_i) gegen die Phase nach dem Stimulus (φ_{i+1}). Die Bereiche der Kurve, die unterhalb der gestrichelten Winkelhalbierenden liegen, bedeuten eine Verzögerung (Verlängerung der Periodendauer T), die darüber liegenden eine Beschleunigung. Gezeigt ist hier der Fall für den Phasenvorschub $\Omega = 0$. Stabile Fixpunkte sind durch \bullet , instabile Fixpunkte durch \times gekennzeichnet.

Für $\Omega = 0$ vereinfacht sich Gl. (6.1) zu

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\varphi_i) \quad (6.2)$$

mit den Fixpunkten

$$\varphi^* = \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\} \quad (6.3)$$

Die lineare Stabilitätsanalyse für die Fixpunkte ergibt allgemein

$$f'(\varphi^*) = 1 - K \cos(2\pi\varphi_i^*) \quad (6.4)$$

mit φ^* stabil für $|f'(\varphi^*)| < 1$ und φ^* instabil für $|f'(\varphi^*)| > 1$ (iterierte Abbildung!). Somit gilt für $\varphi^* = 0$ und $\varphi^* = 1$

$$f'(0) = f'(1) = 1 - K \quad (6.5)$$

Diese beiden Fixpunkte sind stabil für $0 < K < 2$ (Periodenverdoppelung bei $K = 2$), da unter diesen Bedingungen gilt $f'(\varphi^*) < 1$. Für $\varphi^* = \frac{1}{2}$ gilt dagegen:

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - K \cos \pi = 1 + K \quad (6.6)$$

Dieser Fixpunkt ist instabil für alle $K > 0$. Für eine graphische Darstellung dieses Falles ($\Omega = 0$, Gl. 6.2) vgl. Abb. 6.2.

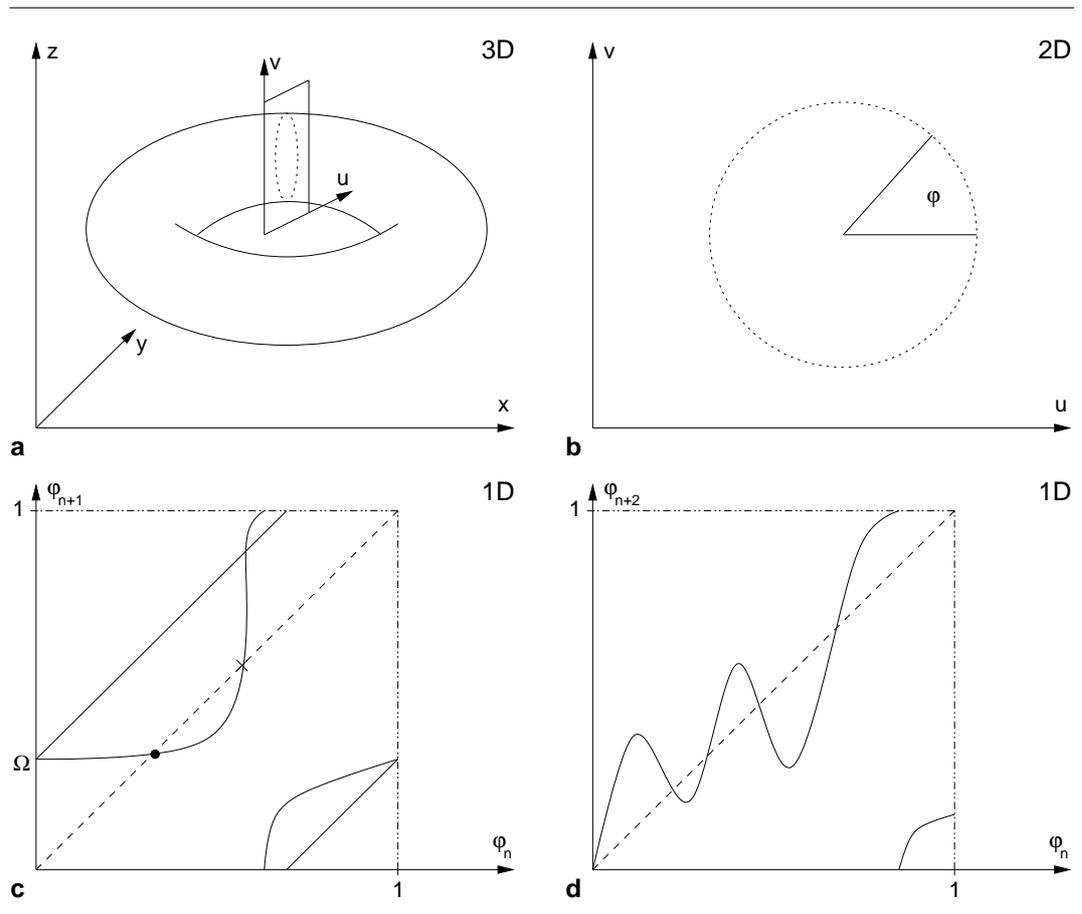


Abbildung 6.3: Torus und Kreisabbildung. (a) Torus im dreidimensionalen Raum (x, y, z) mit eingezeichnetem Poincaré-Schnitt mit den neuen Koordinaten u und v ; (b) Poincaré-Schnitt des Torus mit eingezeichneter Phase ϕ (2D-map); (c) erste Iterierte der Phase ϕ (1D-map); (d) zweite Iterierte der Phase ϕ . In der 1D-map sind stabile Fixpunkte durch \bullet , instabile Fixpunkte durch \times gekennzeichnet. Ein Fixpunkt entspricht in dieser Darstellung einem Schnittpunkt mit der Winkelhalbierenden (gestrichelte Linie).

6.3 Torus und Kreisabbildung

Die Kreisabbildung kann auch als eindimensionale Darstellung (1D-map) eines Torus verstanden werden (vgl. Abb. 6.3). Ein Torus besteht aus der Überlagerung inkommensurabler (in einem irrationalen Verhältnis zueinander stehender) Frequenzen. Eine Formel für einen 2er-Torus mit zwei Frequenzen ω_1, ω_2 lautet beispielsweise:

2er-Torus

$$x(t) = f(\omega_1 t, \omega_2 t) = \cos(\omega_1 t) \cdot \sin^2(\omega_2(1 + \omega_2 t)t) \tag{6.7}$$

Der Winkel ϕ im Poincaré-Schnitt (2D-map) des Torus entspricht dem Winkel zweier aufeinanderfolgender Durchstoßpunkte der Poincaré-Ebene. In der (eindimensionalen) Kreisabbildung (1D-map) repräsentiert der Parameter Ω , auch Phasenvorschub genannt, das Verhältnis der beiden Frequenzen im System, $\Omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$.

Für irrationale Werte von Ω wird der gesamte Torus abgelaufen.

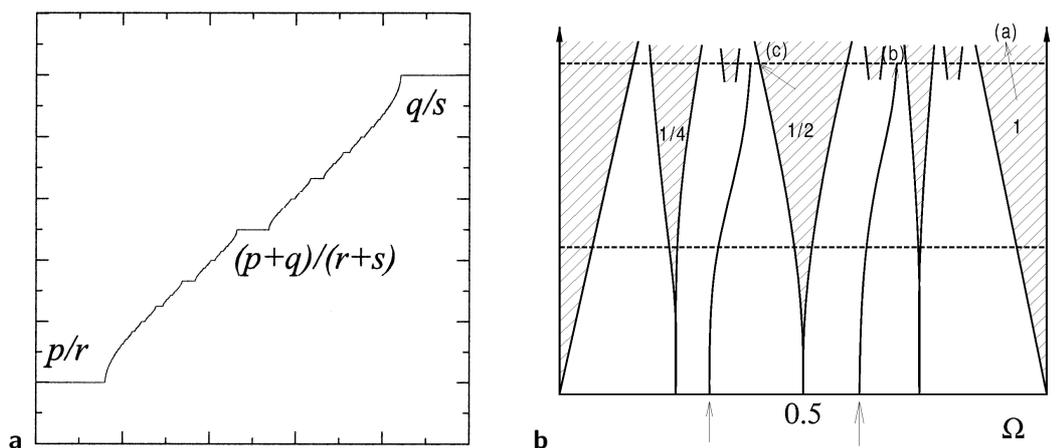


Abbildung 6.4: Ein- und zweidimensionale Bifurkationsdiagramme der Kreisabbildung. Das eindimensionale Bifurkationsdiagramm mit dem Bifurkationsparameter Ω wird auch Teufelstreppe (*devil's staircase*) genannt, die “Zungen” im zweidimensionalen Bifurkationsdiagramm mit den Parametern Ω, K Arnoldzungen (*arnold tongues*). Aus Cartwright et al. (2001) (a) und Cross (2000) (b).

6.4 Zweidimensionales Bifurkationsdiagramm

Bisher haben wir nur eindimensionale Bifurkationsdiagramme (mit einem Bifurkationsparameter) kennengelernt, wie z.B. das der logistischen Abbildung (vgl. Abb. 4.2). Da die Kreisabbildung

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\varphi_n) \quad (6.8)$$

zwei Parameter (Ω, K) enthält, kann ein zweidimensionales Bifurkationsdiagramm der Kreisabbildung erstellt werden, bei dem die beiden Parameter gegeneinander aufgetragen werden. Ein solches zweidimensionales Bifurkationsdiagramm ist in Abb. 6.4b gezeigt.

▲ **Windungszahl** Die Windungszahl (*winding number*) w mißt den mittleren Phasenvorschub. Sie ist definiert als

Windungszahl

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n - \varphi_0}{n} \quad (6.9)$$

wobei die Iteration für φ_n ohne die modulo-Operation auszuführen ist (absolute Phase).

Die Auftragung der Windungszahl w gegen den Phasenvorschub Ω wird auch als Teufelstreppe (*devils stair case*) bezeichnet. Sie ist nur für $0 \leq K \leq 1$ definiert.

Teufelstreppe

Die Teufelstreppe zeigt rationale und irrationale Frequenzverhältnisse bei fester Koppelung K . Damit läßt sich auch die Lage und Breite von Resonanzzonen für verschiedene Koppelungen bestimmen. Für eine graphische Darstellung vgl. Abb. 6.4a.

Die Teufelstreppe hängt eng mit der Farey-Folge und dem Farey-Baum zusammen: Die Breite der Bereiche konstanter Windungszahlen w (im 2D-Bifurkati-

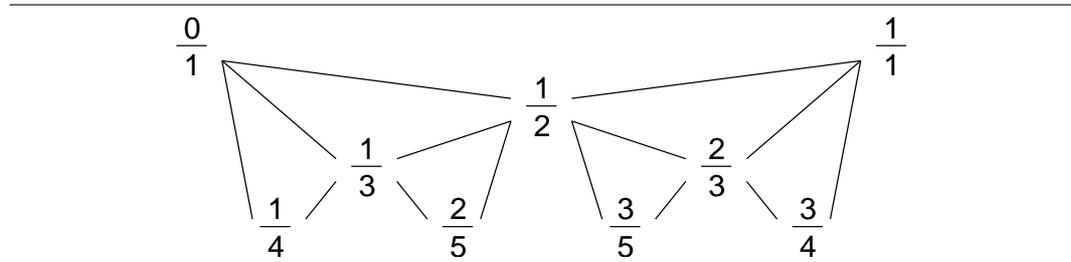


Abbildung 6.5: Die ersten drei Ebenen des Farey-Baumes. Jede neue rationale Zahl entsteht durch Addition von Zähler und Nenner zweier Zahlen der vorherigen Ebene (vgl. die eingezeichneten Linien). Der Farey-Baum kann dazu genutzt werden, die “Stufen” der Teufelstreppe, die festen Frequenzverhältnissen der gekoppelten Oszillatoren der Kreisabbildung entsprechen, aufzufinden. Die Breite dieser Bereiche (im 2D-Bifurkationsdiagramm auch Arnold-Zungen genannt) nimmt grob gesprochen entsprechend dem Erscheinen der zugehörigen Zahl in einer Ebene des Farey-Baumes ab: je tiefer die Ebene des Farey-Baumes, desto kleiner die Stufe in der Teufelstreppe bzw. desto schmaler die Arnold-Zunge im 2D-Bifurkationsdiagramm.

onsdiagramm auch Arnold-Zungen genannt) nimmt grob gesprochen entsprechend dem Erscheinen der zugehörigen Zahl in einer Ebene des Farey-Baumes ab: je tiefer die Ebene des Farey-Baumes, desto kleiner die Stufe in der Teufelstreppe bzw. desto schmaler die Arnold-Zunge im 2D-Bifurkationsdiagramm.

Farey-Folge

▲ **Farey-Folge** Die Farey-Folge F_n für jede positive natürliche Zahl n ist die Menge aller nichtreduzierbaren rationalen Zahlen a/b mit $0 \leq a \leq b \leq n$ und $(a, b) = 1$ angeordnet in aufsteigender Reihenfolge. Die ersten Folgen sind:

$$F_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_2 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_3 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_4 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}$$

Mit Ausnahme von F_1 besteht jede Folge F_n aus einer ungeraden Anzahl von Termen, von denen der mittlere Term immer $\frac{1}{2}$ ist. (Weisstein, 1999a) Die Farey-Folge kann auch graphisch veranschaulicht werden (vgl. Abb. 6.5). Man nennt diese Darstellung auch Farey-Baum.

Farey-Baum

Das Verhalten der Kreisabbildung kann für unterschiedliche Werte von K (Koppelung) beschrieben werden (für eine gute Darstellung vgl. Cross, 2000).

Eigenschaften für $K = 0$

Für $K = 0$ vereinfacht sich die Gleichung für die Kreisabbildung Gl. (6.1) zu

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Omega(\text{mod } 1) \tag{6.10}$$

Für rationale Frequenzverhältnisse ($\Omega = \frac{p}{q}$) ergibt sich eine periodische Folge $\{\Omega_n\}$ mit der Periode q , für irrationale Ω eine nichtperiodische (quasiperiodische) Folge $\{\Omega_n\}$. Das Maß der irrationalen Ω ist 1 für $K = 0$ (d.h. die Wahrscheinlichkeit $p(\Omega \in \mathbb{I})$ für ein irrationales Ω beträgt $p(\Omega \in \mathbb{I}) = 1$).

- Jedes Computermodell arbeitet *per definitionem* mit rationalen Ω . Daher ist eine numerische Simulation des Verhaltens für irrationale Ω nur eingeschränkt möglich.

Eigenschaften für $K < 1$

Für $0 < K < 1$ existiert für jedes rationale Frequenzverhältnis ($\Omega = \frac{p}{q}$) ein Intervall $I_{p/q}$ (Resonanzzone, Synchronisationszone, Entrainment, *phase locking*, Arnoldzunge, *arnold tongue*), dessen Inneres nicht leer ist und für das $w(\Omega, K) = \frac{p}{q}$ für alle $\Omega \in I_{p/q}$ gilt. Diesen Ω entspricht im Phasenraum ein (gefalteter) Grenzzyklus als Attraktor.

Arnoldzunge

Für jede irrationale Zahl $\alpha \in (0, 1)$ gibt es genau ein Ω mit $w(\Omega, K) = \alpha$. Diesen Ω entspricht im Phasenraum ein Torus als Attraktor. Die Tori sind im Gegensatz zu den Grenzzyklen strukturell instabil, d.h. kleine Parametervariationen führen zu qualitativen Veränderungen im System.

strukturell instabil

Die Breite $b(I_{p/q})$ der Arnoldzungen ist proportional zu K und q :

$$b(I_{p/q}) \propto K^q \tag{6.11}$$

Entsprechend ergibt sich die Gesamtbreite $\sum_{p,q=1}^{\infty} b(I_{p/q})$ aller Arnoldzungen $I_{p/q}$ zu

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} b(I_{p/q}) \lesssim \sum_{\substack{p,q=1 \\ p \leq q}}^{\infty} K^q = \sum_{q=1}^{\infty} q \cdot K^q = \frac{K}{(1-K)^2} \tag{6.12}$$

Die Gesamtbreite der Arnoldzungen geht für $K \rightarrow 0$ ebenfalls gegen 0 und für $K \rightarrow 1$ gegen 1. Trotzdem existiert für $K \rightarrow 1$ für jedes $\Omega \in \mathbb{I}$ eine Windungszahl w .

Das Maß (in Ω) ist sowohl für rationale als auch für irrationale Werte von w ungleich 0 für $0 < K < 1$.

Die Breite der Arnoldzungen für einen gegebenen Wert von K kann abhängig von der Größe des Nenners q sortiert werden. Grob gesprochen nimmt die Breite mit zunehmendem q ab. Die genaue Wiedergabe dieser Sortierung ist der Farey-Baum (vgl. Abb. 6.5).

Eigenschaften für $K = 1$

In der Abbildung tritt ein Wendepunkt für $\varphi = 0$ auf.

Das Maß von Ω für irrationale w ist 0. Die Menge der Ω für irrationale w ist ein Fraktal mit der (numerisch ermittelten) Dimension $D = 0.87$.

Die quasiperiodischen Lösungen mit irrationalen Windungszahlen w treten für alle Punkte der Abbildung, eingeschlossen den Wendepunkt, auf und lösen sich bei $K = 1$ in Chaos auf. D.h. die Tori verschwinden (das Loch im Torus verschwindet).

Die periodischen Lösungen mit rationalen Windungszahlen w treten nur für diskrete Punkte der Abbildung auf, typischerweise entfernt vom Wendepunkt. Sie lösen sich für $K = 1$ typischerweise nicht in Chaos auf.

Eigenschaften für $K > 1$

Die Resonanzzonen (Arnoldzungen) überlappen. Das führt zur Koexistenz von Grenzyklen und dem Phänomen der Hysterese.

Periodische Lösungen können sich über Periodenverdoppelungskaskaden in Chaos auflösen.

Abbildungsverzeichnis

1	Bernoulli- oder Modulo-Abbildung: Phasenraumdarstellung (iterierte Abbildung) und Autokorrelationsfunktion (AKF).	4
1.1	Trendelimination einer Zeitreihe mit linearem Trend.	13
1.2	Glättung des verrauschten periodischen Signals mittels <i>Running average</i> -Filter.	14
1.3	Weißes Rauschen.	18
1.4	Wahrscheinlichkeitsdichte (Gaußsche Glockenkurve) und Wahrscheinlichkeitsverteilung (Gaußsches Fehlerintegral) der Gaußschen Fehlerfunktion.	19
1.5	Irrfahrt (Diffusion, <i>random walk</i>).	20
2.1	Numerische harmonische Analyse: Fourieranalyse.	26
2.2	Artefakte bei der Spektralschätzung: Randeffekte.	27
2.3	Randeffekte als Artefakte bei der Spektralschätzung: Verschiedene Fensterfunktionen der Fourier-Analyse.	28
2.4	Randeffekte als Artefakte bei der Spektralschätzung: Anwendung verschiedener Fensterfunktionen der Fourier-Analyse auf eine an ihren Rändern nichtperiodische Sinusdatenreihe.	29
2.5	Artefakte bei der Spektralschätzung: Aliasing.	30
3.1	Grundbegriffe dynamischer Systeme.	31
3.2	Bistabilität.	33
3.3	Phasenraumrekonstruktion eines Grenzzyklus und eines gefalteten Grenzzyklus.	35
3.4	Phasenraumrekonstruktion eines Torus.	37
3.5	Bifurkationsdiagramm der Heugabel-Bifurkation (<i>pitch-fork bifurcation</i>).	39
3.6	Zeitbereich und Phasenraum einer Heugabel-Bifurkation (<i>pitch-fork bifurcation</i>).	39
3.7	Potentialdarstellung einer Heugabel-Bifurkation (<i>pitch-fork bifurcation</i>).	40
3.8	Sattel-Knoten-Bifurkation (<i>saddle-node bifurcation</i>).	41
3.9	Potentialdarstellung einer Sattel-Knoten-Bifurkation (<i>saddle-node bifurcation</i>).	41

3.10	Phasenportrait der Sattel–Knoten–Bifurkation (<i>saddle–node bifurcation</i>).	42
3.11	Hopf–Bifurkation.	43
4.1	Erste und zweite Iterierte der logistischen Abbildung $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ für $r = 3.5$	45
4.2	Bifurkationsdiagramm der logistischen Abbildung.	46
4.3	Der Lorenz–Attraktor.	47
5.1	Das menschliche Herz: Anatomie und elektrophysiologische Nomenklatur.	49
5.2	Der typische EKG–Verlauf mit den zugehörigen Herztätigkeiten.	50
6.1	Erklärung der Phasenresponse–Kurven über die Auslenkung vom Einheitskreis in x –Richtung und unmittelbare radiale Relaxation.	54
6.2	Phasenübergangs–Kurve (<i>phase–transition curve</i> , PTC), “Kreisabbildung”.	55
6.3	Torus und Kreisabbildung.	56
6.4	Ein– und zweidimensionale Bifurkationsdiagramme der Kreisabbildung (Teufelstreppe, <i>devil’s staircase</i> und Arnoldzungen, <i>arnold tongues</i>).	57
6.5	Die ersten vier Ebenen des Farey–Baumes.	58

Vokabelverzeichnis engl.–dt.

accuracy	Genauigkeit
address	behandeln
ahead of sth.	einer Sache voraus sein
alignment	Ausrichtung, Alignment
amenable	offen, zugänglich
angle velocity	Winkelgeschwindigkeit
approach	Ansatz
appropriate	angemessen, angebracht; zugehörig
arbitrary	beliebig
assessment	Bewertung, Abschätzung
be associated with	im Zusammenhang stehen mit
attractor	Attraktor
bifurcation	Bifurkation
be capable	fähig sein
challenge	anzweifeln, in Frage stellen
chaotic	chaotisch
clustering	
comparison	Vergleich
computational biology	
concern	betreffen
consensus sequence	Konsensussequenz
constrain	einschränken, behindern
constraint	Bedingung, Einschränkung; Nebenbedingung; Zwang
context-free grammar	kontextfreie Grammatik
contribute	beitragen
correspond to	entsprechen, sich beziehen auf
crucial	ausschlaggebend, entscheidend
denominator	Nenner
denote	bezeichnen, kennzeichnen
derive	ableiten, herleiten
die, <i>pl.</i> dice	Würfel
discrimination	Unterscheidung
drawback	Nachteil
dynamical system	dynamisches System
dynamic programming	dynamische Programmierung
dynamics	Dynamik
elucidate	erläutern
entrain	mitnehmen, mitreißen

equation of motion	Bewegungsgleichung
erratic	schwankend, sprunghaft
estimate [<i>Verb</i>]	schätzen, abschätzen
estimate [<i>Subst.</i>]	Schätzer
examine	behandeln
false positive	Falschpositives
feasible	machbar, möglich
fixed point	Fixpunkt
flow	Fluß
gap	Lücke, Spalte
genefinding	Genidentifikation
homology	Homologie
impact	Auswirkung
inference	Rückschluß, Folgerung, Deduktion
inflection point	Wendepunkt
initial condition	Anfangsbedingung
inquiry	Forschung, Nachforschung
intersection point	Schnittpunkt
intimately interrelated	in enger Wechselbeziehung miteinander stehend
likelihood	Wahrscheinlichkeit
limit cycle	Grenzyklus
lineage	Abstammung, Abstammungslinie
locate	auffinden
maximum likelihood	größte Wahrscheinlichkeit
mismatch	Fehlanpassung
null cline	Nullkline
obtain	erhalten, erreichen, erlangen
odds <i>Pl.</i>	Ungleichheit
orbit	Orbit, Trajektorie
pacemaker	Schrittmacher
pairwise	paarweise
penalty	Strafe, Bestrafung
phase shift	Phasenverschiebung
phase space	Phasenraum
phase transition	Phasenübergang
phylogenetic tree	Phylogenetischer Stammbaum
pitch fork	Heugabel
pitch fork bifurcation	Heugabel–Bifurkation
Poincaré section, map	Poincaré–Schnitt, –Abbildung
point of inflection	Wendepunkt
policy	Strategie
posit	postulieren
posterior	später
prediction	Vorhersage

preliminary	einleitend, vorausgehend, vorläufig
preprocessing	Vorverarbeitung
probabilistic	wahrscheinlichkeitstheoretisch
probabilistic model	Wahrscheinlichkeitsmodell
probability	Wahrscheinlichkeit
probability distribution	Wahrscheinlichkeitsverteilung
profile	Profil, Querschnitt
quasiperiodic	quasiperiodisch
ratio	Anteil, Quotient
realm	Bereich, Fachgebiet
reasonable	angemessen, vernünftig
with regard to	im Hinblick auf
reliable	verlässlich, zuverlässig
residual	Residuum
residue	Rest [auch chem.], Überrest
reveal	aufdecken, aufzeigen
saddle–node bifurcation	Sattel–Knoten–Bifurkation
score	Punktzahl, Score
scoring scheme	
sequence [math.]	Folge
similarity	Ähnlichkeit
sophisticated	anspruchsvoll
speech recognition	Spracherkennung
spread	Streuung
spurious	falsch
state	Zustand
state machine	Automat
stationary solution	stationäre Lösung
statistical significance	statistische Bedeutung/Signifikanz
stretch	Strecke, Ausdehnung
swep [swap, swapped]	tauschen
tackle	angehen
in terms of	in Form von
threshold	Schwelle, Grenzwert
time step	Zeitschritt
trace back	zurückführen auf
tractable	lenkbar
trajectory	Trajektorie
transition probabilities	Übergangswahrscheinlichkeiten
treat	behandeln
unambiguously	unzweideutig, eindeutig
underpin	unterbauen, untermauern
variety	Vielzahl
weight	Gewicht
weight matrix	Gewichtsmatrix

Literaturverzeichnis

- Beeler GW, Reuter H** (1977) Reconstruction of the action potential of ventricular myocardial fibres. *J Physiol* **268**:177–210
- Bronstein IN, Semendjaev KA, Musiol G, Mühlig H** (1999) Taschenbuch der Mathematik, Harri Deutsch, Frankfurt/M.
- Cartwright JHE, Gonzalez DL, Piro O** (2001) Pitch perception: A dynamical-systems perspective. *PNAS* **98**(9):4855–4859
- Chatfield C** (1982) Analyse von Zeitreihen, Teubner, Leipzig
- Cross M** (2000) Chaos on the Web, in *Physics 161: Introduction to Chaos*, California Institute of Technology
- Durbin R, Eddy SR, Krogh A, Mitchison G** (1998) Biological sequence analysis, Cambridge University Press, Cambridge
- Ebeling W, Engel H, Herzog H** (1990) Selbstorganisation in der Zeit, Wissenschaftliche Taschenbücher Mathematik/Physik, Akademie-Verlag, Berlin
- Ebeling W, Feistel R** (1982) Physik der Selbstorganisation und Evolution, Akademie-Verlag, Berlin
- Haken H** (1975) Cooperative phenomena in systems far from equilibrium and in nonphysical systems. *Rev Mod Phys* **47**:67–121
- Hastings JW, Sweeney BM** (1958) A persistent diurnal rhythm of luminescence in *Gonyaulax polyhedra*. *Biol Bull* **115**:440–58
- Hopf E** (1942) Abzweigung einer periodischer Lösung von einer Stationären Lösung eines Differential Systems. *Ber Math Phys Sächsische Akad Wiss Leipzig* **94**:1–22
- Johnson CH** (1999) Forty years of PRCs — what have we learned? *Chronobiology International* **16**(6):711–743
- Kaplan D, Glass L** (1995) Understanding Nonlinear Dynamics, Springer, New York
- Kumpf K** (1996) Die dynamische Komplexität des menschlichen Elektroencephalogramms, Dissertation, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, Tübingen
- Lorenz EN** (1963) Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the atmospheric sciences* **20**:130–141

- Markus M** (1994) Chaos, in Lexikon der Biologie, Bd. E1994, S. 34–41, Herder
- Mc Laughlin JB, Martin PC** (1975) Transition to turbulence in a statistically stressed fluid system. *Phys Rev A* **12**:186–203
- Saltzman B** (1962) Finite amplitude free convection as an initial value problem - I. *J Atmos Sci* **19**:329–341
- Sparrow CT** (1982) *The Lorenz Equation: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors*, Springer, Berlin
- Stöcker H** (1998) *Taschenbuch der Physik*, Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 3. Aufl.
- Swinney HL, Gollub JP**, (Hg.) (1981) *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*, Springer, Berlin
- Vogel H**, (Hg.) (1997) *Gerthsen Physik*, Springer, Berlin, Heidelberg, 50. Aufl.
- Weisstein EW** (1999a) Farey Sequence, in Eric Weisstein's World of Mathematics, CRC Press LLC, <http://mathworld.wolfram.com/FareySequence.html>
- Weisstein EW** (1999b) Hopf Bifurcation, in Eric Weisstein's World of Mathematics, CRC Press LLC, <http://mathworld.wolfram.com/HopfBifurcation.html>

Index

Fett gedruckte Seitenzahlen bei den nachfolgenden Stichwörtern verweisen auf diejenigen Stellen, an denen der dazugehörige Begriff im Zusammenhang erklärt oder definiert wird, *kursive* auf eine Abbildung.

- Abtastrate, 8
- Aliasing, **30**
- Analyse im Frequenzbereich, **22**
- Analyse im Zeitbereich, **15**
- aperiodisch, **1**
- arnold tongue, *siehe* Arnoldzunge
- Arnoldzunge, 57, **59**
- Attraktor, **32**
 - seltsamer (fraktaler), **2**
- Attraktordimension, **35**
- Attraktordimension, **35**
- Autokorrelationsfunktion (AKF), **15**
- Autokorrelationsfunktion (AKF), 15–17
- autoregressiver Prozeß, **21**

- Barr-Körperchen, 40
- Bassin, **32**
- Begriffe, Regeln, Sätze, **ii**
- Bernoulli-Abbildung, 4
- Bernoullische Abbildung, **3**
- beschränkt, **1**
- Bifurkation, **32, 37**
 - Heugabel-Bifurkation, **38, 39, 40**
 - Hopf-Bifurkation, **43, 43**
 - Sattel-Knoten-Bifurkation, **41, 41, 42**
- Binärdarstellung, 4
- BOX-MÜLLER-Formel, **19**

- circadiane Uhr, 53
- circle map, 55

- Delay-Koordinaten, **33**
- deterministisch, **1**
- Deterministisches Chaos, **1**
- deterministisches Chaos, **1**
- Dissipation, **33**

- EKG, **50**
- Entrainment, *siehe* Arnoldzunge
- Exzeß, **10**

- Farey-Baum, **58, 58**
- Farey-Folge, **58**
- FEIGENBAUM-Szenario, **46**
- Fensterfunktionen, **29**
- Filter, **11**
 - Differenzieren, **11**
 - gewichtetes, **13**
 - Glättung, 13
 - Polynom-Fit, 12
- Fourier-Analyse, 25–30
- Fourierkoeffizienten, **25**
- fraktaler Attraktor, **2**

- Gaußsche Glockenkurve, **19**
- gekoppelte Oszillatoren, 53–60
- Glättung, **13**
- Gleitmittelwert, 12, **13**

- Heugabel-Bifurkation, **38, 39, 40**
- Hochpaß, **11**
- Hopf bifurcation, *siehe* Hopf-Bifurkation
- Hopf-Bifurkation, **43, 43**

- Instabilität, 4

- Kolmogorov-Entropie, 2, **2**
- Korrelogramm, **15**
- Kreisabbildung, **54, 55**

- linearisierte Differentialgleichung, **38**
- Link zum Skript, **i**
- logistische Abbildung, **45, 45, 46**
 - Bifurkationsdiagramm, 46
 - iterierte Abbildung, 45
- Lorenz-Attraktor, **47**
- Lorenz-System, **46**
- Lyapunov-Exponent, 2, **2, 34**
- Lyapunov-Exponenten, **34**

- Markov-Kette, **21**
- metrische Entropie, **2, siehe** Kolmogorov-Entropie
- Mittelwert, **9**

- Mittelwert $\langle x_i \rangle$, **9**
 Modulo–Abbildung, **3, 4**
 Momente, **8**
 moving average process, **20**

 nichtlineare Dynamik, **31**
 Nichtlinearität, **4**
 Normalverteilung, **19**
 Nyquist–Frequenz, **30**

 Periodenverdoppelungskaskaden, **60**
 phase space, *siehe* Phasenraum
 Phasenübergangs–Kurve, **54, 55**
 Phasenraum, **32**
 Phasenresponse–Kurve, **53**
 Phasenresponse–Kurve (PRC), **53**
 pitch–fork bifurcation, *siehe* Heugabel–
 Bifurkation
 Poincaré–Abbildung, **36**
 Polynom–Fit, **12**
 Potential, **40**
 Prozeß
 autoregressiver, AR(p), **21**
 diskreter stochastischer, 17–22
 Gleitmittelprozeß, MA(q), **20**
 Irrfahrt, Diffusion, **19**
 reiner Zufall, **18**
 Pseudophasenraum, **33**

 r –tes Moment, **8**
 Randeffekte, **27**
 random walk, **19**
 Residuen, **12**
 Resonanzzone, *siehe* Arnoldzunge
 Robustheit, **15**
 running average, 12, **13**

 saddle–node bifurcation, *siehe* Sattel–
 Knoten–Bifurkation
 saddle–node bifurcation, *siehe* Sattel–
 Knoten–Bifurkation
 Sampling–Frequenz, **8**
 Sattel–Knoten–Bifurkation, **41, 41, 42**
 Satz von Takens:, **34**
 Schiefe, **9**
 Schiefe s , **9**
 Seltsamer Attraktor, **2**
 Signifikanz, **16**
 Standardabweichung, **9**
 Stationarität, **10**
 stochastischer Prozeß, **17**
 autoregressiver, AR(p), **21**
 Gleitmittelprozeß, MA(q), **20**
 Irrfahrt, Diffusion, **19**
 reiner Zufall, **18**
 strukturell instabil, **59**
 Symbole im Skript, **ii**
 Synchronisationszone, *siehe* Arnoldzun–
 ge
 Teufelstreppe, **57, 57**
 Tiefpaß, **13**
 Torus
 2er–Torus, **56**
 Trajektorie, **32**
 Trajektorie, Orbit, **32**
 Transiente, 4, **32**
 Trendelimination, **11**

 Varianz, **9**
 Additivität, **12**
 Varianz σ_x^2 , **9**

 Wölbung, **10**
 Weißes Rauschen, **18**
 wichtige Begriffe, **ii**
 Wiener–Chinchin–Theorem, **26**
 Windungszahl, **57**

 X–Chromosom, 40

 Yule–Walker–Gleichungen, 17

 Zeitreihe, **8**
 diskret, **8**
 kontinuierlich, **8**
 Zeitreihenanalyse
 Anwendungen, **7**
 Zustandsraum, *siehe* Phasenraum