Nichtlineare Dynamik und Zeitreihenanalyse

— 6. Übung —

1 JAVA–Experimente zur logistischen Abbildung

Die logistische Abbildung (*logistic map*, *quadratic map*) ist ein diskretes dynamisches System mit einer Variable x, das durch die Abbildung

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) = f(x_n) \tag{1}$$

bestimmt wird. x_n, x_{n+1} sind Werte der Variablen in aufeinanderfolgenden Schritten, r ist ein Parameter. Sie ist eines der einfachsten Beispiele für ein nichtlineares diskretes dynamisches System. Eine Anwendung dieser Abbildung ist die Modellierung von Insektenpopulationen ohne Generationsüberlappung.

1.1 Graphische Iteration und qualitative Bifurkationsanalyse

Die Beschreibung zu den einzelnen Abbildungen ist jeweils in der Bildunterschrift gegeben.

Abb. 1.1: `http://www.expm.t.u-tokyo.ac.jp/~kanamaru/Chaos/e/Logits/logits.html`

Abb. 1.2: `http://www.lboro.ac.uk/departments/ma/gallery/doubling/`

Abb. 1.3: `http://www.cmp.caltech.edu/~mcc/Chaos_Course/Demonstrations.html`

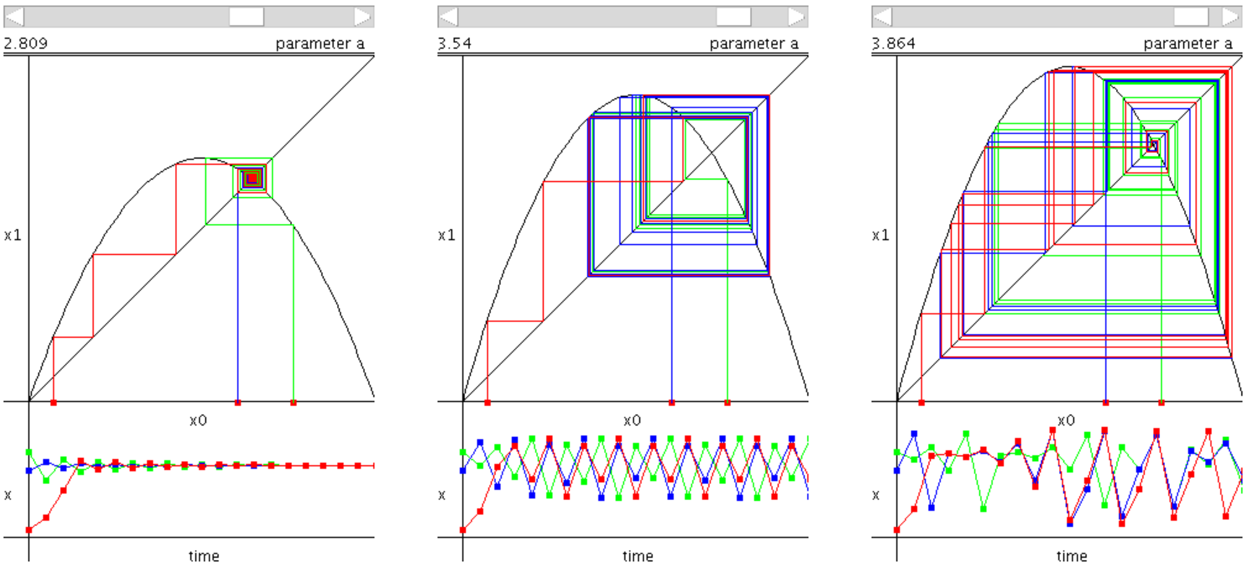

Abb. 1.1: *Time Series of Logistic Map.* Links ein stabiler Fixpunkt für $a < 3$, in der Mitte verschiedene Zyklen für $a = 3.54$, rechts chaotisches Verhalten für $a > 3.57$. Der Parameter a entspricht dabei dem Paramter r in Gl. (1)

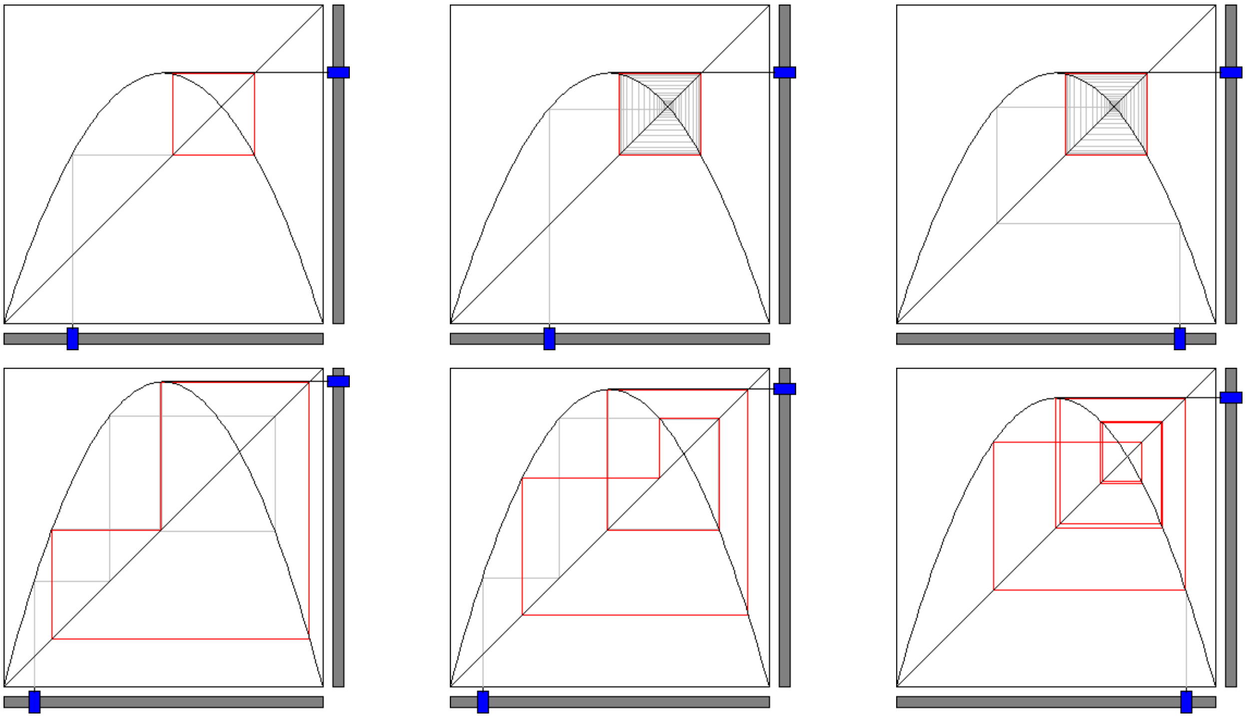

Abb. 1.2: *Iteration of the Logistic Map.* Oben ist die Stabilität eines Zweierzyklus für beliebige Anfangsbedingungen gezeigt, unten ein Dreier–, Fünfer– und ein Zehnerzyklus.

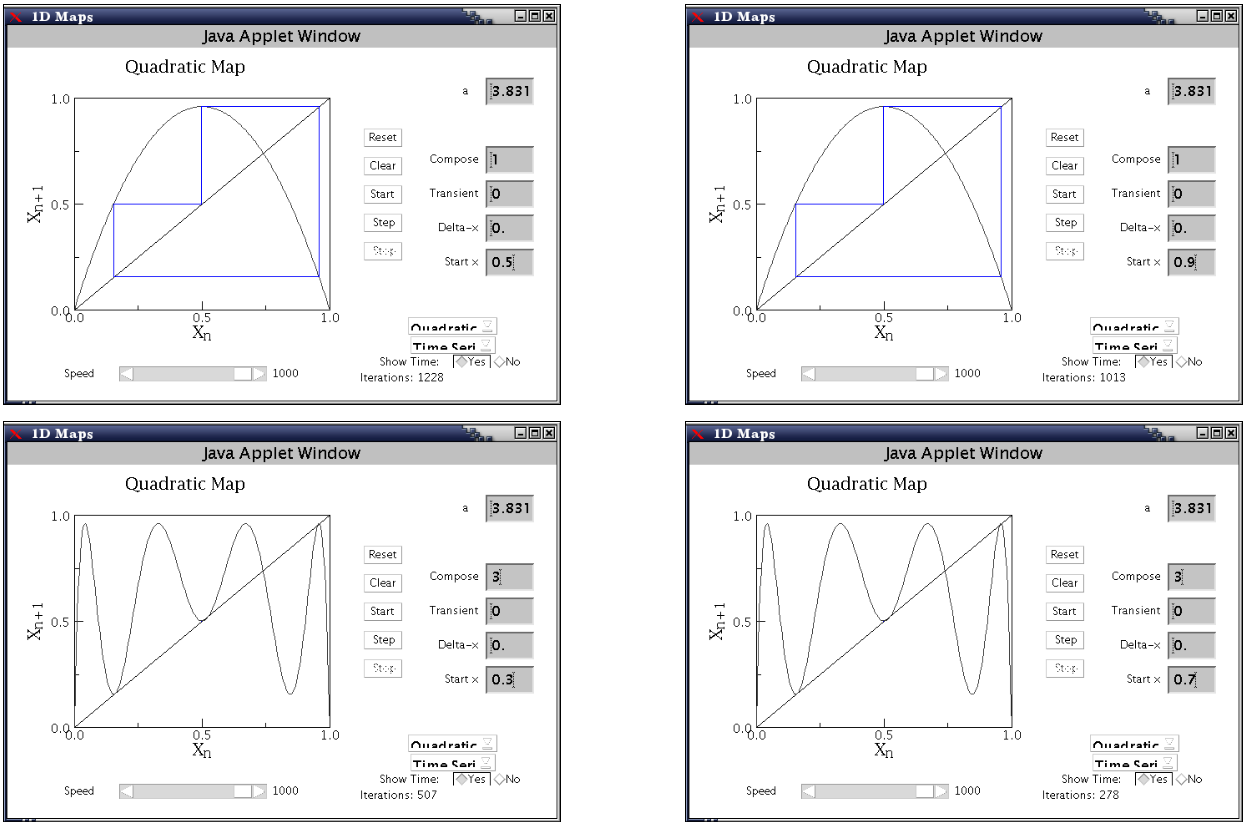

Abb. 1.3: *JAVA applets for Chaos.* Für einen konstanten Paramterwert $a = r = 3.8319$ ist oben der stabile Dreierzyklus für verschiedene Anfangsbedingungen gezeigt. Unten dann die dritte Iterierte für denselben Parameterwert und ebenfalls unterschiedliche Startwerte. Die Berechnung wurde jeweils nach einigen Iterationen angehalten, die bisher gezeichneten Linien gelöscht und mit dem zuletzt berechneten Wert weitergerechnet.

1.2 Detaillierte Bifurkationsanalyse

Abb. 1.4: `http://www.expm.t.u-tokyo.ac.jp/~kanamaru/Chaos/e/Bif/BifApp.html`

Abb. 1.5: `http://mathpost.la.asu.edu/~daniel/logistic_bifurcation.html`

Abb. 1.6: `http://www.cmp.caltech.edu/~mcc/Chaos_Course/Demonstrations.html`

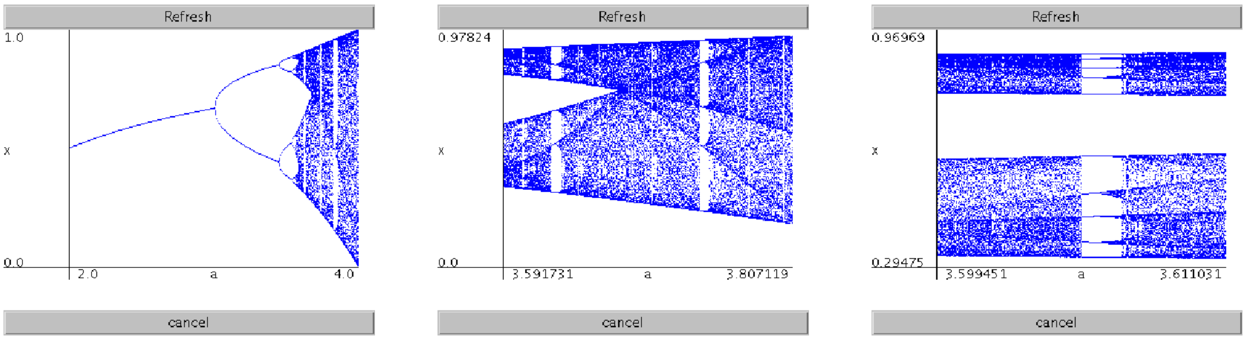

Abb. 1.4: *Bifurcation diagram of the logistic map.* Beliebige Fenster können durch Aufziehen mit der Maus vergrößert und so Periodenverdoppelungskaskaden gefunden werden.

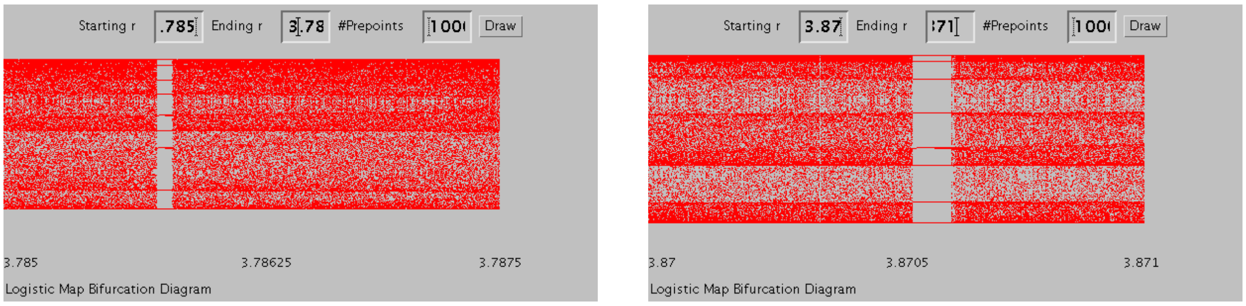

Abb. 1.5: *Bifurcation Diagram of the Logistic Map.* Das Applet erlaubt die direkte Eingabe von Parameterwerten für r Dadurch können Periodenverdoppelungskaskaden gefunden und gezielter analysiert werden. Zudem zeigt es im Gegensatz zum Applet in Abb. 1.4 auch die aktuellen Werte für den Parameter r an, was die Weiterverwendung im Folgenden (vgl. Abb. 1.6) erleichtert.

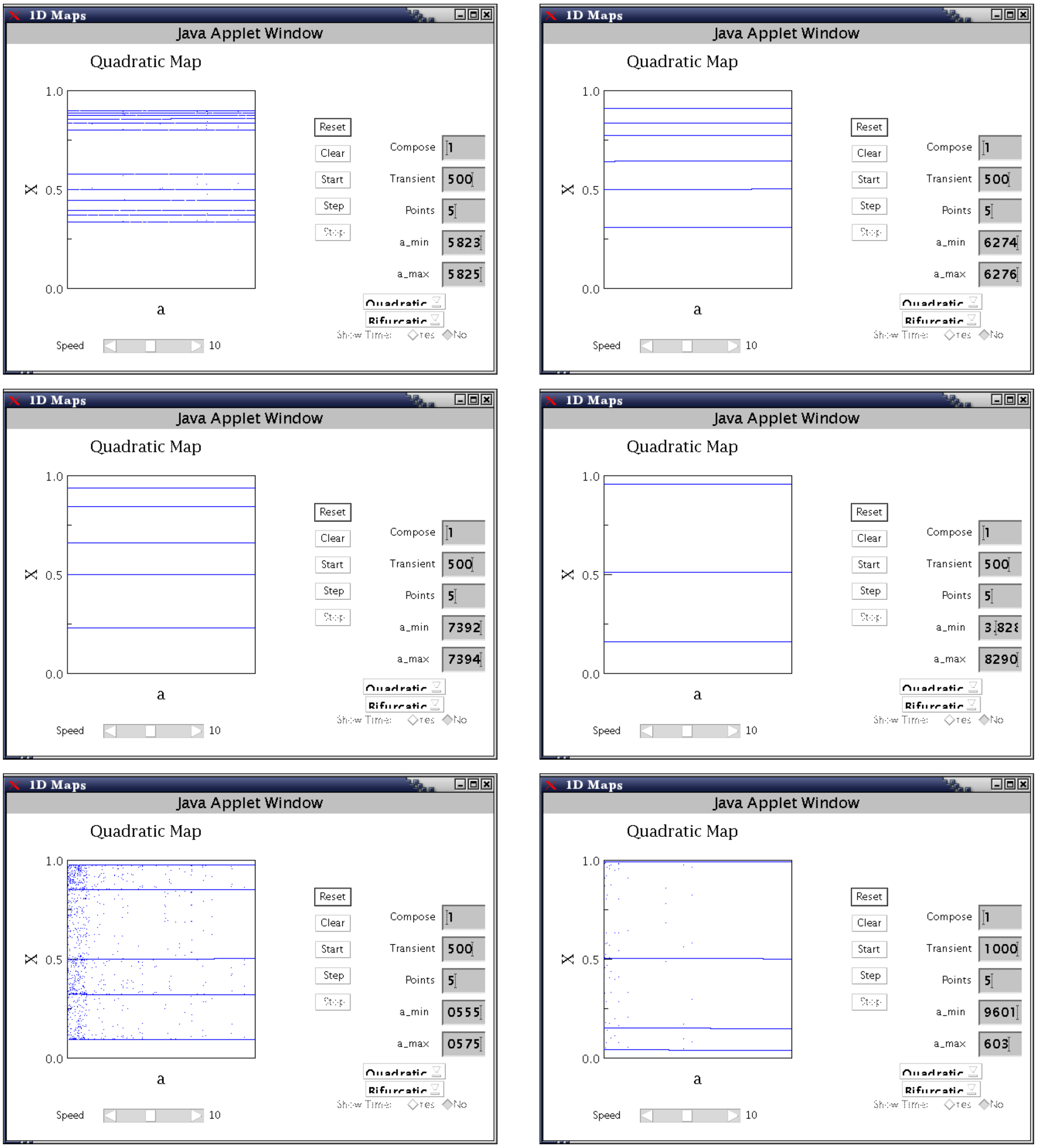

Abb. 1.6: *JAVA applets for Chaos.* Im Modus “Bifurcation” wurden gezielt verschiedene Parameterbereiche für den Parameter r analysiert, die Fenster im Chaos darstellen, die dann ihrerseits wieder in PD–Kaskaden in Chaos übergehen. Der Reihe nach dargestellt sind periodische Fenster mit der Periode 12 (um $r = 3.5824$), Periode 6 (um $r = 3.6275$), Periode 5 (um $r = 3.7393$), Periode 3 (um $r = 3.8289$), nochmals Periode 5 (um $r = 3.9056$) und Periode 4 (um $r = 3.9601$). Um störende Transienten zu vermeiden, wurde der Wert für die als Transienten verworfenen Punkte auf 500, im letzten Fall auf 1000 gesetzt.

2 JAVA–Experiment zum Lorenzattraktor

Das System

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \qquad \dot{y} = rx - y - xz \qquad \dot{z} = xy - bz \tag{2}$$

heißt LORENZ–*System der konvektiven Turbulenz*. Dabei sind $\sigma > 0, r > 0$ und $b > 0$ Parameter. Das LORENZ–System besitzt für $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r = 28$ einen Attraktor Λ (LORENZ–*Attraktor*) mit der numerisch ermittelten Dimension $d_H(\Lambda) \approx 2.06$.

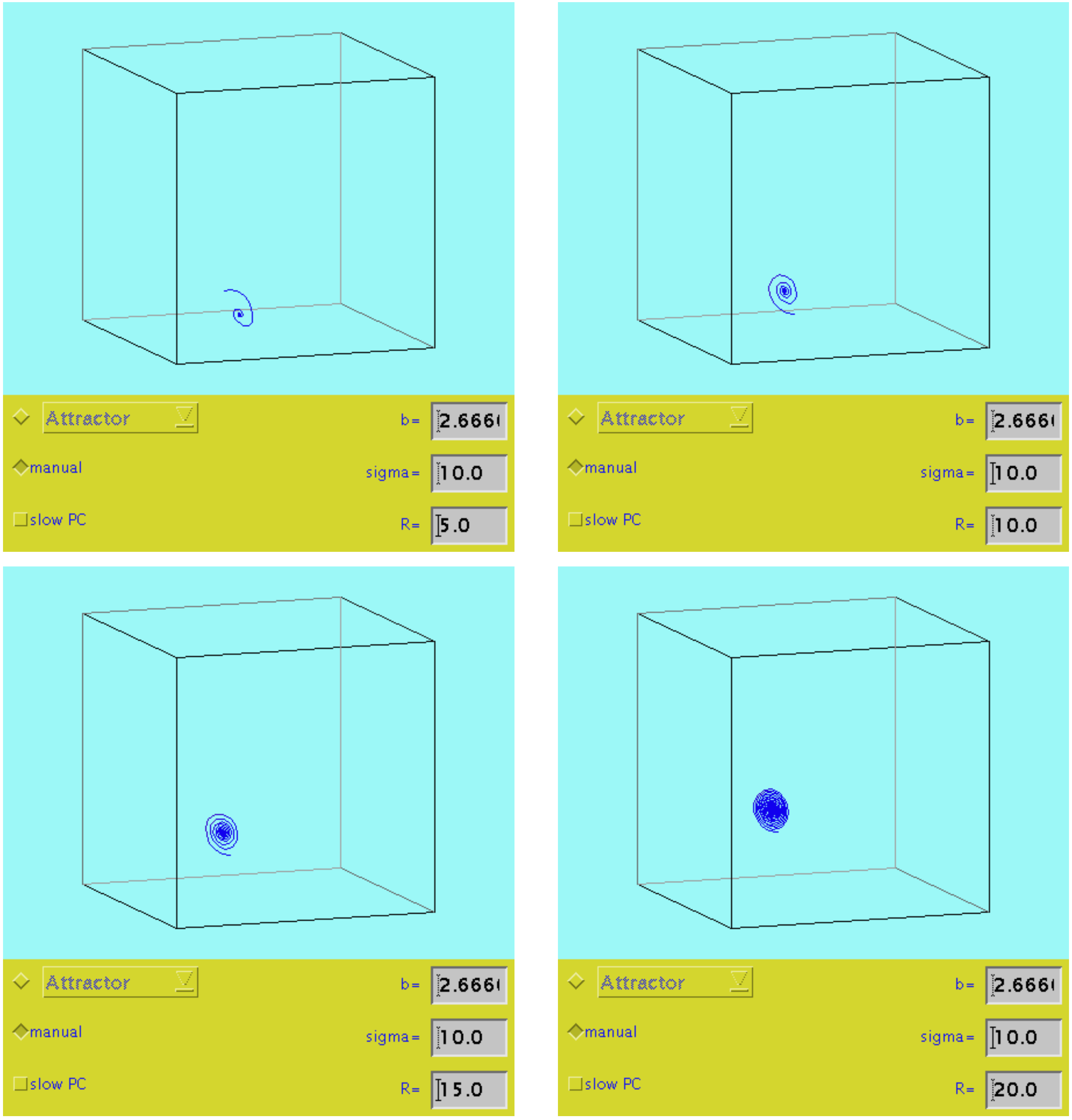

Abb. 2.1: *JAVA applets for the Lorenz System.* Stabile Fixpunktlösungen für $b = \frac{8}{3}$, $\sigma = 10.0$ und variable Werte für $r < 24.74$. Die Werte für r waren $r \in \{5, 10, 15, 20\}$.

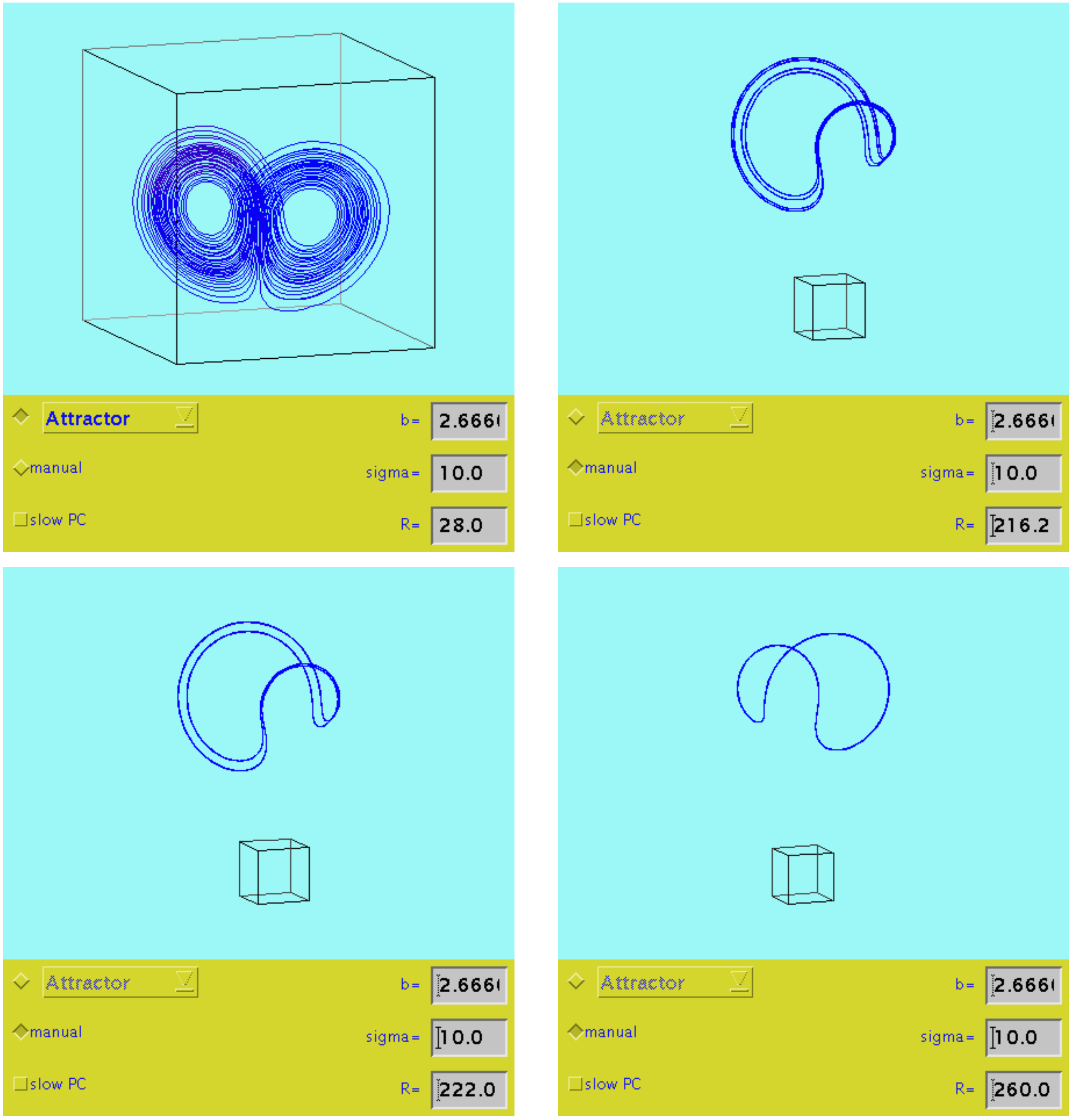

Abb. 2.2: *JAVA applets for the Lorenz System.* Links oben der (chaotische) Lorenz–Attraktor (für $b = \frac{8}{3}$, $\sigma = 10.0$ und $r = 28$). Allerdings ist das Lorenzsystem ist nicht für alle Werte von $r > 24.74$ chaotisch: Es existieren Bereiche mit stabilen periodischen Lösungen, die ähnlich dem Feigenbaumdiagramm bei der Logistischen Abbildung über Periodenverdopplungen in chaotische Bereiche übergehen. Allerdings treten die Periodenverdopplungen beim Lorenzsystem in Richtung abnehmender Werte des Paramters r auf. Hier gezeigt ist die PD–Kaskade für 8, 4 und 2 Schleifen (jeweils abwechselnd um den positiven und negativen instabilen Fixpunkt) für $r = 216.2$, $r = 222.0$ und $r = 260.0$.