Nichtlineare Dynamik und Zeitreihenanalyse

— 5. Übung —

1 Phasenraumrekonstruktion deterministischer Signale: Grenzzyklus

Ziel der Übung ist es, mit Phasenrekonstruktionstechniken und dem Poincaréschnitt vertraut zu werden. Dazu werden einfache periodische Signale erzeugt, die mit einer Exponentialfunktion nichtlinear verzerrt sind, um harmonische Oberwellen (Signalfrequenzen bei Vielfachen der Grundfrequenz) zum Grundsignal hinzuzufügen.

Um einen einfachen (nichtgefalteten) Grenzzyklus zu erzeugen, wurde eine periodische exponentiell verzerrte Zeitreihe $x(t_i) = \exp\left(\sin\left(2\pi \cdot 128\frac{t_i}{8192}\right)\right)$ mit $t_i = 0, \ldots, 8192$ mit der Samplingfrequenz $f_s = 8192$ Hz und einer Sinusfrequenz $f_0 = 128$ Hz durch die Grace–Funktion *Edit – Data sets — Edit – Create new – Formula* erzeugt. Die Skala für die

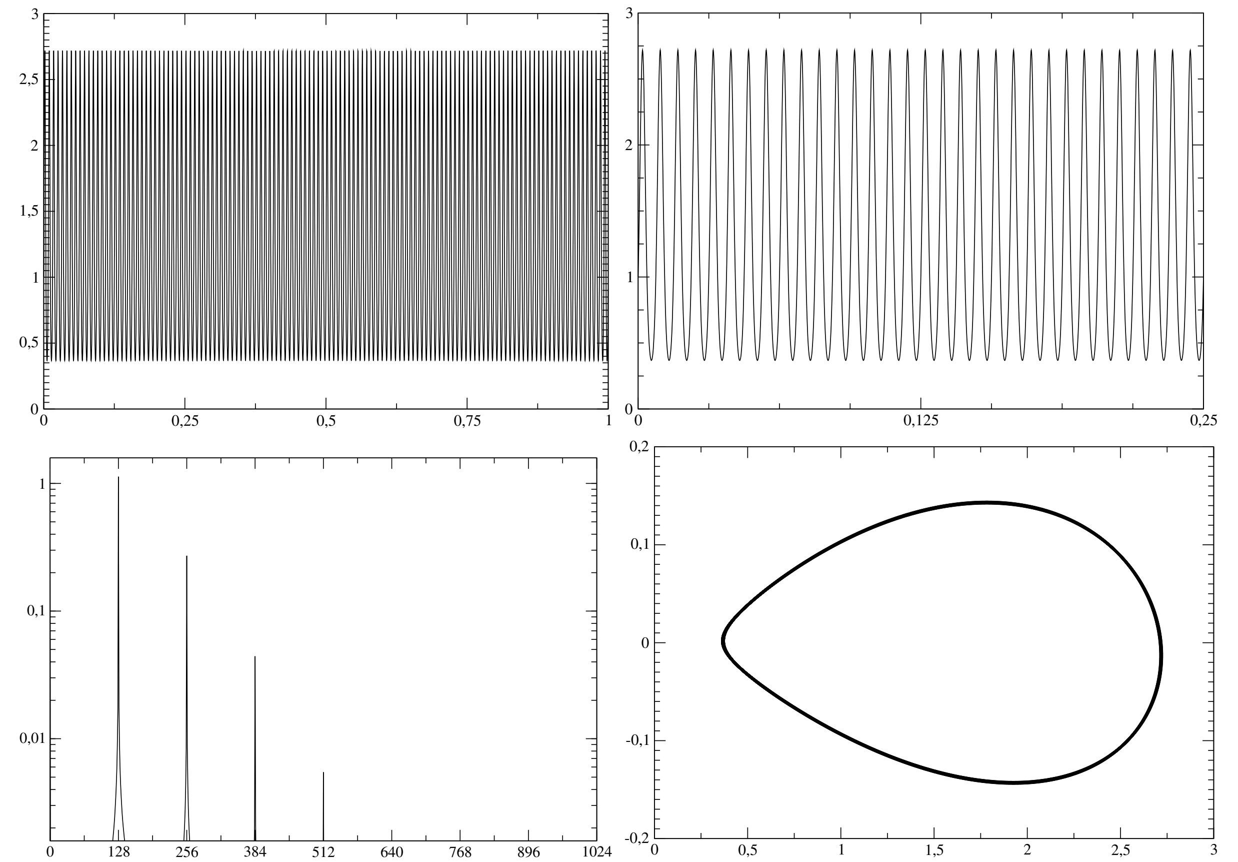

Abb. 1.1: Phasenraumrekonstruktion eines Grenzzyklus. Links oben ist die gesamte Zeitreihe im Überblick dargestellt, rechts daneben ein Ausschnitt, auf dem die Periodizität erkennbar ist. Links unten dann das Amplitudenspektrum der Fouriertransformation und rechts daneben die Darstellung des Grenzzyklus im x–$\dot{x}$–Pseudophasenraum.

Abszisse der Zeitreihendarstellung wurde in Sekunden umskaliert. Mittels FFT wurde das Amplitudenspektrum (die Amplituden–Frequenz–Darstllung ohne Fourierfenster) berechnet und halblogarithmisch dargestellt. Deutlich sichtbar werden in diesem Spektrum die Peaks für die Harmonischen der Grundfrequenz $f_0 = 128$ Hz, die bei einem Vielfachen der Grundfrequenz, $f_n = nf_0$ mit $n = 1, 2, \ldots$, liegen.

Zur Darstellung des Grenzzyklus wurde als Pseudophasenraum der x–$\dot{x}$–Raum gewählt. Dazu wurde das Signal differenziert (über die Grace–Funktion *Data – Transformations – Differences – Forward difference*), anschließend der letzte Datenpunkt der ursprünglichen Datenreihe gelöscht (*Data – Data set operations – Drop points*, hier *Start at: 8192* und *Stop at: 8192*). Das Datenset für die x–$\dot{x}$–Darstellung wurde anschließend durch die Grace–Funktion *Data – Transformations – Evaluate expression* und die Formel $x = s0.y$ erzeugt. Für die Ergebnisse vgl. Abb. 1.1.

2 Phasenraumrekonstruktion eines gefalteten Grenzzyklus

Neben der oben beschriebenen und analysierten Zeitreihe wurde noch eine zweite Zeitreihe $x(t_i) = \exp\left(\sin\left(2\pi \cdot 64 \frac{t_i}{8192}\right)\right)$ mit $t_i = 0, \ldots, 8192$ mit der Samplingfrequenz $f_s = 8192$ Hz und einer Sinusfrequenz $f_0 = 64$ Hz durch die Grace–Funktion *Edit – Data sets — Edit – Create new – Formula* erzeugt. Anschließend wurden die beiden Zeitreihen miteinander über die Grace–Funktion *Data – Transformations – Evaluate expression* über die Formel $y = (s0.y + 0.2 * s1.y)^2$ verknüpft. Die hieraus resultierende Datenreihe ist die Zeitreihe eines gefalteten Grenzzyklus. Sie hat eine Grundfrequenz $f_0 = 64$ Hz, was in der Darstellung der Zeitreihe (Abb. 2.1) an den alternierenden Amplituden deutlich erkennbar ist.

Mittels FFT wurde das Amplitudenspektrum berechnet und logarithmisch dargestellt. Es besteht in diesem Fall aus den Harmonischen der Grundfrequenz $f_0 = 128$ Hz und den Harmonischen zur Subharmonischen $g_0 = 64$ Hz.

Für die Darstellung des gefalteten Grenzzyklus wurde wieder der x–$\dot{x}$–Pseudophasenraum genutzt, die Darstellung erfolgte nach dem oben beschriebenen Vorgehen.

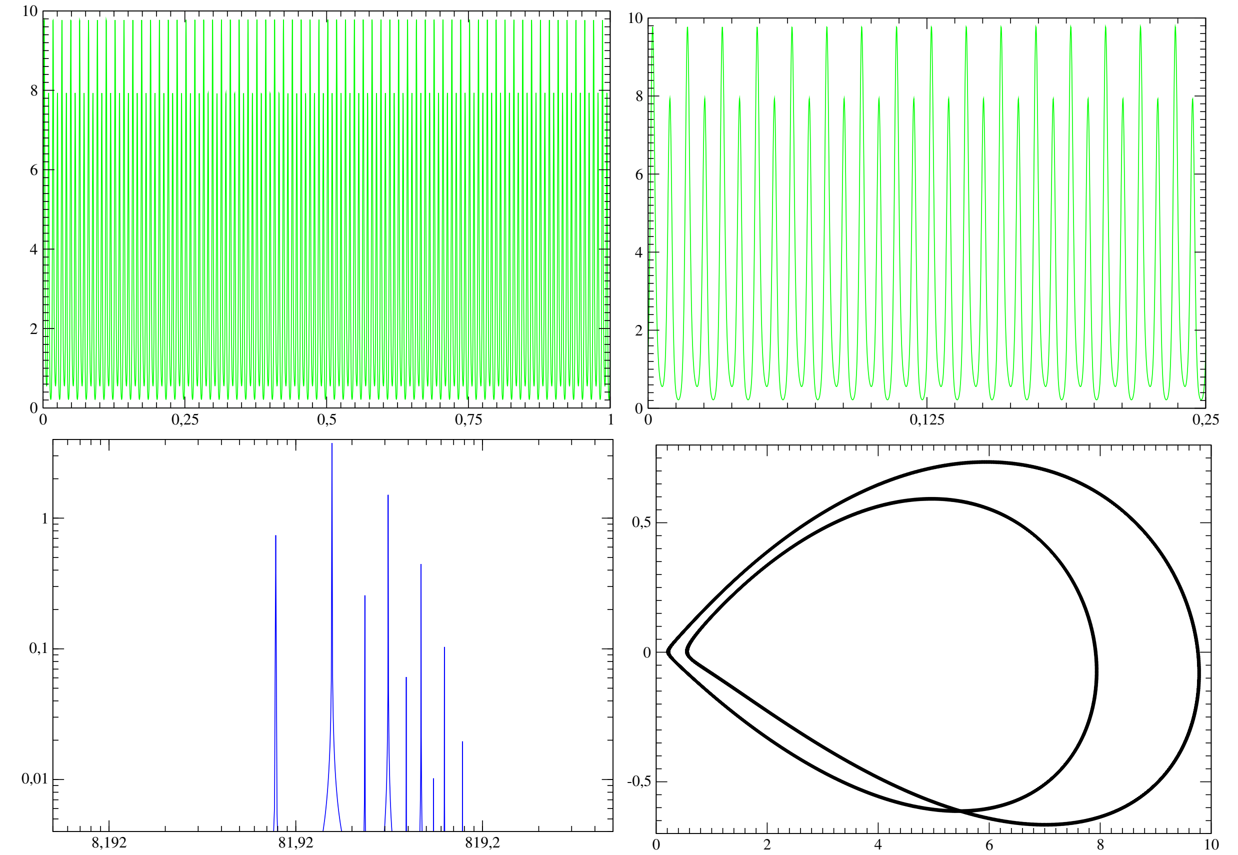

Abb. 2.1: Phasenraumrekonstruktion eines gefalteten Grenzzyklus. Links oben ist die gesamte Zeitreihe im Überblick dargestellt, rechts daneben ein Ausschnitt, auf dem die beiden sich überlagernden Perioden gut erkennbar sind. Links unten dann das Amplitudenspektrum der Fouriertransformation: Auch hier sind gut die harmonischen der Grundfrequenz $f_0 = 128$ Hz und die Harmonischen der Subharmonischen $g_0 = 64$ Hz zu sehen. Rechts daneben dann die Darstellung des gefalteten Grenzzyklus im x–$\dot{x}$–Pseudophasenraum.

3 Phasenraumrekonstruktion eines Torus

Für die Zeitreihe eines Torus wurde die Datenreihe mit der Grundfrequenz $f_0 = 128$ Hz, wie schon in den beiden vorherigen Abschnitten vorgestellt, mit einer zweiten Datenreihe mit der Frequenz $h_0 = 70.4$ Hz verknüpft. Die resultierende Zeitreihe ist in Abb. 3.1 zu sehen. Die Inkommensurabilität der beiden ursprünglichen Zeitreihen ist deutlich an den nicht mehr alternierenden Amplituden der Zeitreihe zu erkennen.

Auch der Torus wurde wieder im x–$\dot{x}$–Pseudophasenraum dargestellt. Auch wenn für die Einbettung eines Torus ein mindestens dreidimensionaler Phasenraum notwendig ist, reicht die hier gewählte zweidimensionale Darstellung aus, um einen Eindruck von der dreidimensionalen Gestalt des Torus zu gewinnen (vgl. Abb. 3.1).

In einem letzten Schritt wurde eine dem Poincaré–Schnitt verwandte Technik der "stroboskopischen Abbildung" auf die Zeitreihe angewandt, um eine zweidimensionale Darstellung des Torus zu erhalten. Dabei wird die Folge von Phasenraumpunkten im Abstand einer (angenommenen) Erregerperiode (hier $T_0 = 64$ Samples, d.h. Erregerfrequenz $f_E = 128$ Hz) analysiert. Die Abbildung wird mit der Grace–Funktion *Data – Transformations – Sample points* mit den Parametern *Start: 1* und *Step: 64* realisiert. Die resultierende zweidimensionale Abbildung entspricht einem Schnitt des Torus mit der Ebene konstanter Erregerphase.

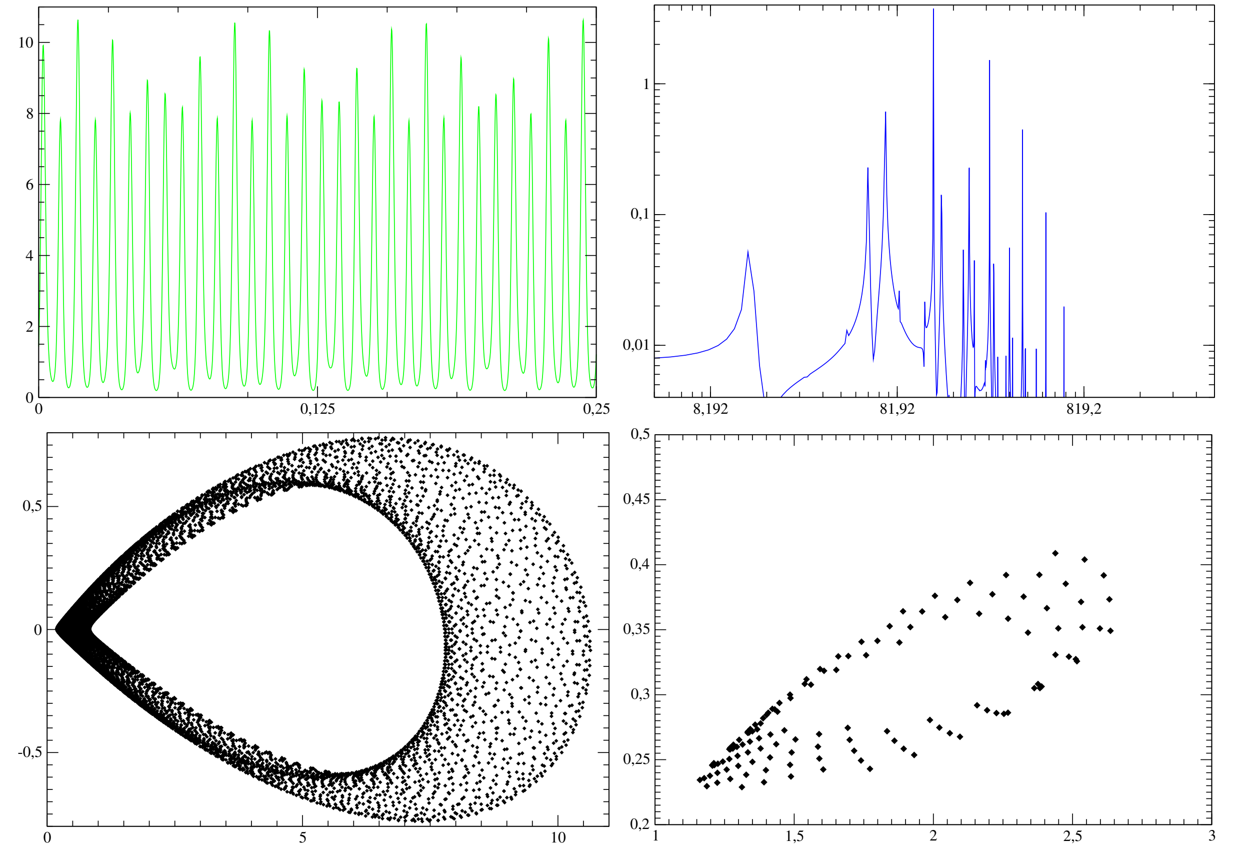

Abb. 3.1: Phasenraumrekonstruktion eines Torus. Links oben ein Ausschnitt aus der Zeitreihe, in dem die beiden inkommensurablen (in einem irrationalen Verhältnis zueinander stehenden) Perioden erkennbar sind. Rechts daneben das Amplitudenspektrum der Fouriertransformation der Zeitreihe. Links unten dann die Darstellung des Torus im zweidimensionalen x–$\dot{x}$–Pseudophasenraum. Auch wenn für die Abbildung eines Torus mindestens ein dreidimensionaler Phasenraum notwendig ist, gibt diese Darstellung schon einen guten Eindruck von der dreidimensionalen Gestalt des Torus. Rechts daneben dann eine dem Poincaré–Schnitt ähnliche stroboskopische Abbildung des Torus.