Nichtlineare Dynamik und Zeitreihenanalyse

— 4. Übung —

1 Numerische harmonische Analyse: Fourier–Analyse

Eine Funktion, die im Intervall $0 \leq x < L$ nur auf einem diskreten System von Punkten $x_k = \frac{L}{N}k$ mit $k = 0, 1, \ldots, N-1$ bekannt ist, läßt sich näherungsweise durch ein trigonometrisches Polynom darstellen:

$$T_N(x) = \sum_{l=0}^{N-1} c_l \exp\left(i\frac{2\pi}{L}lx\right) \tag{1}$$

wobei die Koeffizienten durch

$$c_l = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_i)\exp\left(-i\frac{2\pi}{N}lj\right) \tag{2}$$

gegeben sind. Der Koeffizient c_0 stellt den Mittelwert dar. Für eine gerade Anzahl N von stützstellen ist $c_{N/2}$ reell. Die Koeffizienten haben folgende Symmetrie: $c_l = c^*_{N-l}$ für $l = 1, 2, \ldots, \frac{N}{2} - 1$.

Das trigonometrische Polynom läßt sich umschreiben in:

$$T_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-1}\left(a_l\cos\left(\frac{2\pi}{L}lx\right) + b_l\sin\left(\frac{2\pi}{L}lx\right)\right) + \frac{a_{\frac{N}{2}}}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{L}2x\right) \tag{3}$$

wobei

$$a_0 = 2c_0 \qquad a_k = 2\Re(c_k) \qquad b_k = -2\Im(c_k) \qquad a_{\frac{N}{2}} = 2c_p \tag{4}$$

mit $k = 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1$. Schließlich kann auch die Amplitude A_k ($k = 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1$) der Teilschwingung mit der Frequenz $\omega_k = \frac{2\pi}{L}k$ mit $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ berechnet werden.

Mittels der Grace–Funktion *Edit – Data sets – Edit – Create New – Formula* wurde die Zeitreihe $x(t_i) = 1 + \sin\left(2\pi 10\frac{t_i}{256}\right)$ mit $t_i = 0, \ldots, 255$ erzeugt (durch Eingeben von 'X=$t' und 'Y=1+sin(2*pi*10*$t/256)'). Sie kann als eine verschobene Sinus–Zeitreihe mit der Frequenz von 10 interpretiert werden. Die Sampling–Rate (in Samples pro Einheitsintervall) beträgt 256.

Über die Grace–Funktion *Data – Transformations – Fourier transforms* wurde die numerische harmonische Analyse (FFT) dieser Zeitreihe berechnet. Für eine Darstellung der ursprünglichen Zeitreihe und ihres Amplitudenspektrums (Auftragung der Amplitude gegen die Frequenz) vgl. Abb. 1.1.

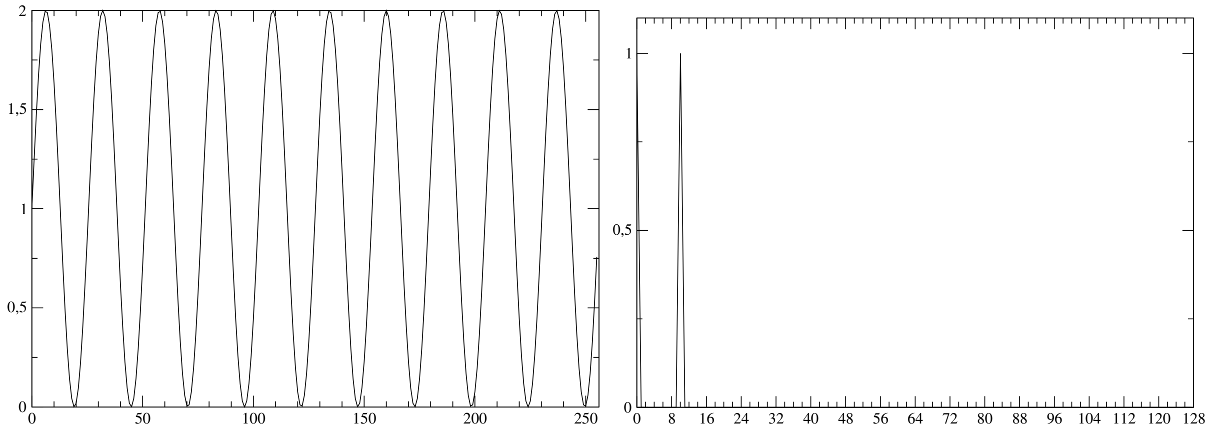

Abb.1.1: Numerische harmonische Analyse: Fourieranalyse. Links dargestellt ist die ursprüngliche Zeitreihe, es handelt sich um eine verschobene Sinus–Zeitreihe der Frequenz 10 (in Samples). Im rechten Graphen das Amplitudenspektrum der Fouriertransformation der Zeitreihe. Gut zu sehen ist hier der "Peak" bei der Frequenz von 10. Ebenfalls zu sehen ist, daß die Frequenzskala (Abszisse) nur bis zur Nyquist–Frequenz skaliert ist, da höhere Frequenzen nicht dargestellt werden können (Sampling–Theorem).

Zusätzlich zum Amplitudenspektrum wurden die Koeffizienten der Fourier–Transformation (über FFT) berechnet (im Menü für die Fourier–Transformation 'Data window: None', 'Load results as: Coefficients' und 'Let result X=Index' eintragen). Die erhaltene neue Datenreihe enthält die Realteile $\Re(c_l)$ der Fourierkoeffizienten c_l als x–Werte, die Imaginärteile $\Im(c_l)$ als y–Werte.

Die Datenreihe wurde nach x– und y–Werten in zwei neue Datenreihen aufgeteilt. Dazu wurden die Real– bzw. Imaginärteile jeweils mit der Grace–Funktion *Data – Transformations – Evaluate expression* in neue Datenreihen geschrieben und die x–Werte der neuen Datenreihen explizit mit den x–Werten der Originaldaten überschrieben (ebenfalls im Menü *Evaluate expression*, z.B. durch Eingabe von '$x = S0.x$' bei '*Formula*', wenn $S0$ die Originaldatenreihe war).

Über die oben dargestellten Zusammenhänge kann aus den Real– und Imaginärteilen der Fourierkoeffizienten c_l der Mittelwert, die Amplitude und die Frequenz der Sinuszeitreihe wiedergefunden werden. Die folgenden Werte der Fourierkoeffizienten c_l waren signifikant von den sie umgebenden Werten verschieden:

$\Re(1) = 1$		$\Re(64) = 0$	$\Re(128) = 0$	
$\Im(0) = 0$	$\Im(10) = -0.5$	$\Im(64) = 0$	$\Im(128) = 0$	$\Im(246) = 0.5$

Damit ergibt sich für den Mittelwert $c_0 = 1$, da $\Re(c_0) = 1$ und $\Im(c_0) = 0$. Die Amplitude A_k für $k = 10$ beträgt $A_{10} = \sqrt{a_{10}^2 + b_{10}^2} = 1$ mit $\Re(c_{10}) \approx 0$ und $\Im(c_{10}) = -0.5$.

2 Artefakte bei der Spektralschätzung: Alialising

Die Fourierzerlegung liefert für eine diskrete Datenreihe der Länge L mit N Samples N unabhängige Koeffizienten c_l. Die niedrigste dabei verwendete Frequenz ist $\omega = \frac{2\pi}{L}$, alle anderen Frequenzen ω_k mit $k = 1, \ldots, \frac{N}{2}$ sind Vielfache dieser Frequenz. Die höchste Frequenz $\omega_{\frac{N}{2}}$ ist die sogenannte Nyquist–Frequenz. Treten in einem Signal Frequenzen auf, die höher sind als die Nyquist–Frequenz, kommt es zu Alialising–Problemen, d.h. die Frequenz wird nicht richtig dargestellt und das Frequenzspektrum weist Artefakte auf.

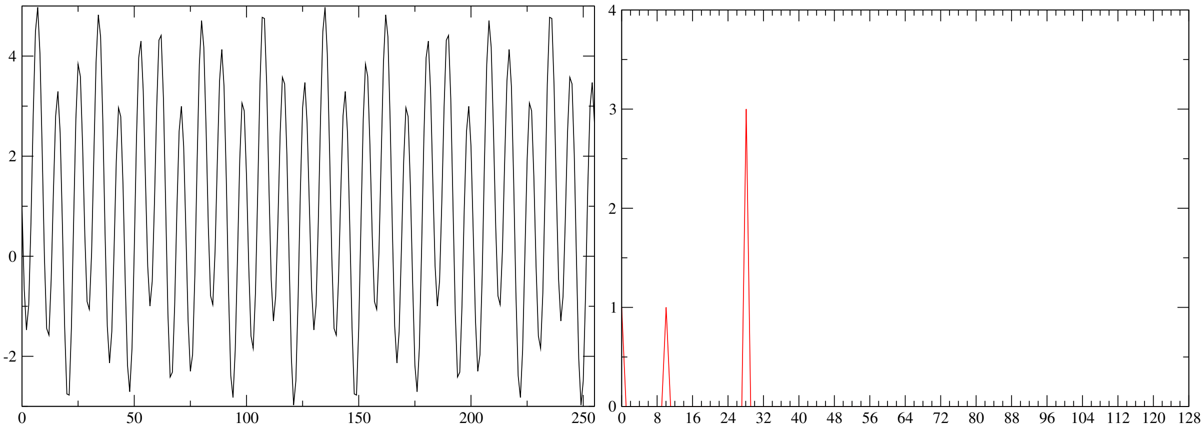

Abb. 2.1: Artefakte bei der Spektralschätzung: Alialising. Links ist die Zeitreihe dargestellt. Es handelt sich um eine Überlagerung zweier Sinus–Zeitreihen mit den Frequenzen 10 und 228 (jeweils in Samples). Rechts ist das Amplitudenspektrum der Fouriertransformation der Zeitreihe abgebildet. Deutlich zu sehen ist hier der hohe "Peak" bei einer Frequenz von ca. 28, der ein Artefakt des Samplings ist, da die Zeitreihe eine Frequenz enthält, die deutlich über der Nyquist–Frequenz liegt.

Um das an einem Beispiel zu verdeutlichen, wurde eine Datenreihe zweier überlagerter Sinussignalen $x(t_i) = 1 + \sin\left(2\pi 10 \frac{t_i}{256}\right) + 3\sin\left(2\pi 228 \frac{t_i}{256}\right)$ mit $t_i = 1, \ldots, 255$ erzeugt. Die beiden überlagerten Frequenzen sind 10 und 228, die Samplingfrequenz 256. Hiervon wurde die Fouriertransformation berechnet und als Amplitudenspektrum dargestellt (vgl. Abb. 2.1). Gut zu sehen ist der "Peak" im Spektrum bei der Frequenz von 10, aber daneben ein wesentlich höherer "Peak" bei einer Frequenz von ca. 28, der eindeutig ein Artefakt ist.

➤ Sampling mit einer Frequenz, die niedriger als das Doppelte der maximalen im Signal vorkommenden Frequenz ist, kann zu ernstzunehmenden Fehlern durch Artefakte in Form niedrigerer Frequenzen führen.

3 Artefakte bei der Spektralschätzung: Randeffekte

Eine der Fourier–Analyse zugrundeliegende Annahme ist, daß das transformierte Signal der Länge L periodisch ist, d.h. $x(t_i + L) = x(t_i)$ und damit z.B. $x(0) = x(L)$. Diese Bedingung erfüllen viele Signale *nicht*. Dadurch kommt es zu sogenannten Randeffekten: Verbreiterung und Verschiebung von relativen Maxima des Amplitudenspektrums. Diese Randeffekte können durch geschickte sogenannte "Fensterfunktionen" verkleinert werden. Das diesen Fensterfunktionen zugrundeliegende Prinzip ist, Datenpunkte an den Rändern geringer zu wichten als in der Mitte des Signals.

Zur näheren Analyse dieses Phänomens wurde eine Datenreihe $x(t_i) = 1 + \sin\left(2\pi 10 \frac{t_i}{250}\right)$ mit $t_i = 0, \ldots, 255$ erzeugt. Sie stelle eine Sinuszeitreihe mit der Frequenz 10 Hz dar, die mit der Samplingfrequenz $f_s = 250$ Hz gesampled wurde. Sie ist mit einer auf Sekunden normierten Abszisse in Abb. 3.1 (links) dargestellt. Von dieser Zeitreihe wurde eine Fouriertransformation (FFT) durchgeführt und das Amplitudenspektrum dieser Transformation dargestellt (Abb. 3.1, rechts). Zur Berechnung wurde die Option '*Data window: None*' genutzt und das Amplitudenspektrum über die Auswahl von '*Load result as: Magnitude*' und '*Let result X=Frequency*' geplottet.

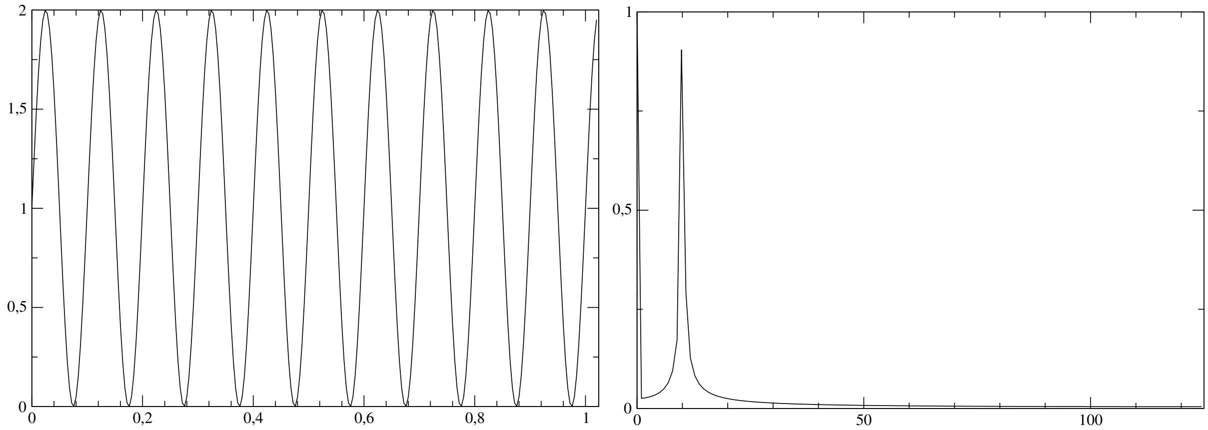

Abb. 3.1: Artefakte bei der Spektralschätzung: Randeffekte. Links ist die Zeitreihe dargestellt. Es handelt sich um eine Sinus–Zeitreihe mit der Frequenz 10 Samples und einer Samplingrate von 250. Rechts ist das Amplitudenspektrum der Fouriertransformation der Zeitreihe abgebildet. Gut zu sehen ist im Amplitudenspektrum die Breite des Peaks, ein typischer Randeffekt, der durch die Aperiodizität des Signals an seinen Rändern entsteht.

Sehr deutlich zu sehen ist der an seinen Rändern sehr breite "Peak" im Amplitudenspektrum, ein typisches Eregebnis der Randeffekte. Als Vergleich kann das Amplitudenspektrum der Sinuszeitreihe mit derselben Frequenz, allerdings periodischen Rändern (Abb. 1.1, S. 2) herangezogen werden. Es weist wesentlich steilere Ränder des "Peaks" im Amplitudenspektrum auf.

Zur Korrektur solcher Randeffekte können bei der Fouriertransformation sogenannte Fensterfunktionen (*window functions*) eingesetzt werden, die die Datenwerte am Rand weniger wichten als die in der Mitte gelegenen. Die Abb. 3.2 gibt eine Übersicht über die sechs in Grace implementierten solchen Fensterfunktionen. In Abb. 3.3 ist dann ihre Wirkung auf die in 3.1 dargestellte an ihren Rändern nichtperiodische Sinuszeitreihe dargestellt.

Es fällt auf, daß alle Fensterfunktionen die Amplitude im Amplitudenspektrum deutlich verringern, am stärksten blackman, am schwächsten welch. Welch ist gleichzeitig die Fensterfunktion mit den steilsten Signalflanken. Bei triangular und parzen treten kleine Artefakte an den Rändern des Amplitudenpeaks auf.

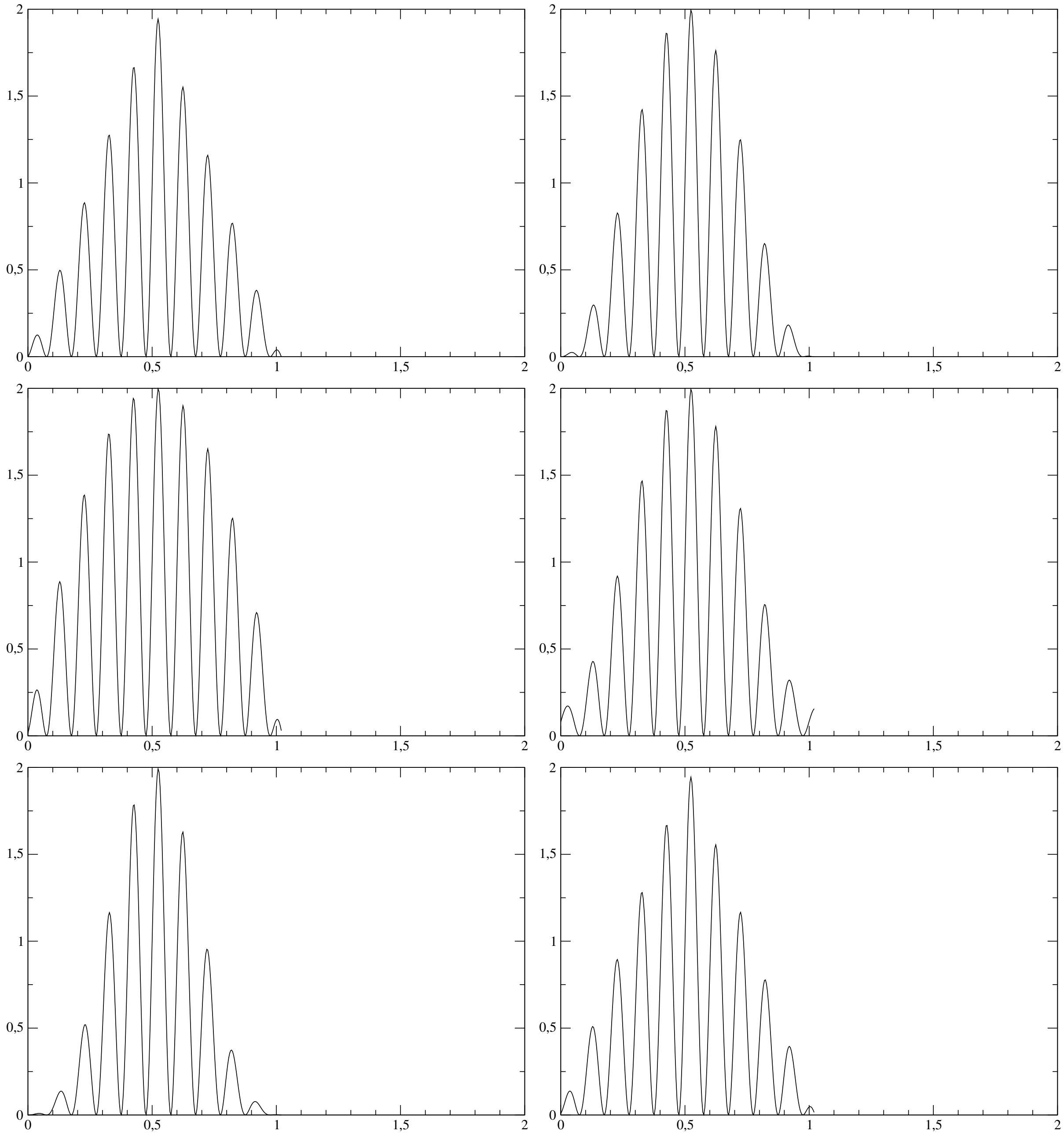

Abb. 3.2: Randeffekte als Artefakte bei der Spektralschätzung: Verschiedene Fensterfunktionen der Fourier–Analyse. Von links nach rechts und von oben nach unten: triangular, hanning, welch, hamming, blackman, parzen. Für ihre Wirkung auf ein an seinen Rändern nichtperiodisches Signal vgl. die Abb. 3.3. Die unterschiedlichen Fensterfunktionen unterscheiden sich hauptsächlich durch ihre unterschiedliche Wichtungsverteilung zwischen Mitte und Rändern.

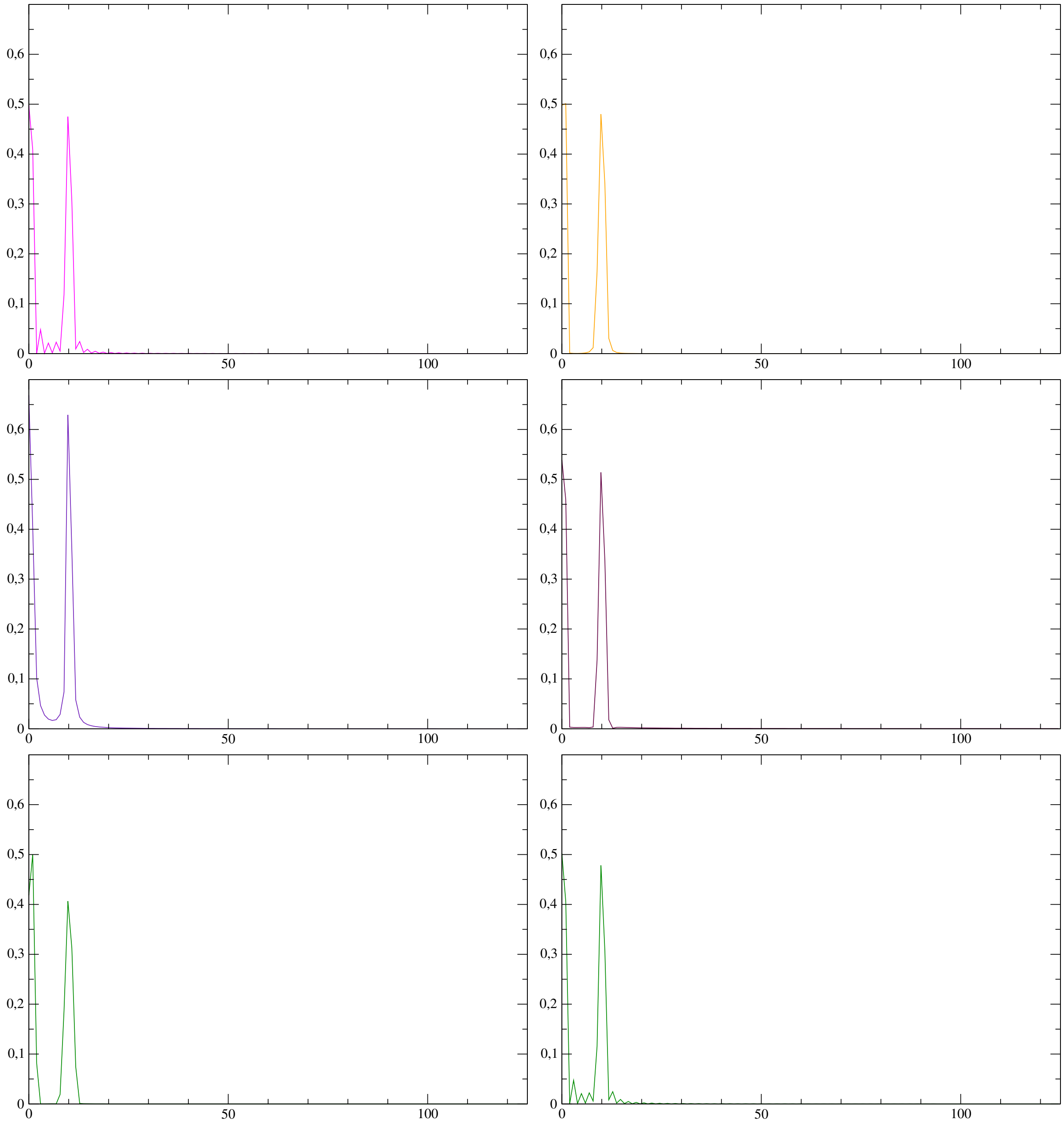

Abb. 3.3: Randeffekte als Artefakte bei der Spektralschätzung: Anwendung verschiedener Fensterfunktionen der Fourier–Analyse auf eine an ihren Rändern nichtperiodische Sinusdatenreihe. Von links nach rechts und von oben nach unten: triangular, hanning, welch, hamming, blackman, parzen. Für eine Darstellung der einzelnen Fensterfunktionen vgl. Abb. 3.2.