Physik für Biologen

Dr. Rückmann — Prof. Röder
Humboldt-Universität zu Berlin
WS 1998/99 — SS 1999

Vorlesungsmitschrift

Inhaltsverzeichnis

Teil I

1. Semester

Kapitel 1

Mechanik

- Punktmechanik
  - Modell der Punktmasse
    - Massepunkt, in dem die gesamte Masse des Körpers konzentriert ist
  - Größen:
    - Ort, Masse, Zeitpunkt

1.1 Kinematik der Punktmasse

1.1.1 Gleichförmig geradlinige Bewegung

- Geschwindigkeit zeitlich nach Betrag und Richtung konstant
- Weg–Zeit–Kurve ist eine Gerade

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{const}$$

1.1.2 Gleichmäßig beschleunigte, geradlinige Bewegung

- Geschwindigkeit verändert sich mit der Zeit
- gleichmäßige Veränderung der Geschwindigkeit mit der Zeit

$$\Delta v \propto \Delta t \qquad a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{const}$$

momentane Geschwindigkeit ist die erste zeitliche Ableitung des Weges (erste Ableitung des Weges nach der Zeit)

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

Beschleunigung a ist die Änderung der Geschwindigkeit pro Zeiteinheit.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad [a] = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

1.1.3 Ungleichmäßig beschleunigte, geradlinige Bewegung

momentane Beschleunigung ist die erste zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit und die zweite zeitliche Ableitung des Weges.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

Zusammenfassung: Allgemeine Definition von v und a

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

Beschleunigung ist die 2. Ableitung des Weges nach der Zeit oder die 1. Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit.

1.1.4 Herleitung der Bewegungsgesetze (Weg–Zeit–Gesetze) der gleichmäßig beschleunigten Bewegung

$$\ddot{x} = a \qquad \dot{v} = a \qquad \text{bei } a\text{=const}$$
$$\int \frac{dv}{dt} dt = \int a \cdot dt$$
$$v(t) = a \cdot t + \underbrace{\text{const}}_{v_0}$$
$$v(t) = a \cdot t + v_0 \qquad v_0 \text{ — Anfangsgeschwindigkeit}$$
$$\dot{x} = v$$
$$\frac{dx}{dt} = v = a \cdot t + v_0$$
$$\frac{dx}{dt} = a \cdot t + v_0 \qquad \text{ges. x(t)?}$$
$$\int \frac{dx}{dt} dt = \int (a \cdot t + v_0) dt$$
$$x(t) = \frac{a}{2} t^2 + v_0 \cdot t + \underbrace{\text{const}}_{x_0} \qquad x_0 \text{ — Anfangsort}$$

Weg–Zeit–Gesetz

$$x(t) = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t + x_0$$

Geschwindigkeit–Zeit–Gesetz

$$v(t) = at + v_0$$

Bsp. 1: Freier Fall

$$a = g = 9.81 \frac{m}{s^2} \qquad x_0 = 0 \qquad v_0 = 0$$
$$x = \frac{g}{2} t^2 \quad \rightarrow \quad h = \frac{g}{2} t^2$$
$$v = g \cdot t$$
$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Bsp. 2: Senkrechter Wurf

$$v = v_0 - g \cdot t$$
$$h = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$$

Bsp. 2: Schräger Wurf

$$x = v_0 t \cdot \cos\alpha$$
$$h = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t \cdot \sin\alpha$$
$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2 v_0 g t \sin\alpha}$$
$$s_w = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \qquad \text{Wurfweite}$$
$$s_h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \qquad \text{Wurfhöhe}$$

1.1.5 v und a als Vektoren

Skalare

- Beispiele
  - z. B. m, ω, t

Vektoren physikalische Größen mit *Betrag* und *Richtung*

- Beispiele
  - Weg $\vec{s}$
  - Kraft $\vec{F}$
  - Geschwindigkeit $\vec{v}$
  - Beschleunigung $\vec{a}$

Einschub: Vektoren

$$\vec{s}, \vec{v}, \vec{a}, \vec{F}, \vec{p}, \vec{M}, \vec{L}, \ldots$$
$$\overline{OP_1} = \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \qquad \leftarrow \qquad |OP_1| = |\vec{r}_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$
$$\overline{OP_2} = \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$
$$\overline{P_1P_2} = \vec{r} = \overline{OP_1} - \overline{OP_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{r}_1 - \vec{r} = \vec{r}_2$$

Multiplikation von Vektoren

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underbrace{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})}_{\text{skalare Größe}}$$
$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

$$\underbrace{\vec{a} \times \vec{b}}_{\text{2 Vektoren}} = \underbrace{\vec{c}}_{\text{Vektor}}$$
$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$$

1.1.6 Kreisbewegung einer Punktmasse

Kreisbewegung beschleunigte Bewegung; die Richtung des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}$ ändert sich ständig (hat stets die Richtung der Bahntangente). Die Bahngeschwindigkeit v ist konstant.

Winkelgeschwindigkeit Kreisfrequenz, ω, Quotient aus überstrichenem Winkel φ und dazu benötigter Zeit t:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad [\omega] = 1\ \mathrm{rad/s} = 1\ \mathrm{s}^{-1}$$

Zusammenhang zwischen Bahngeschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = r\,\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = r\omega \qquad r \text{ — Radius}$$

voller Umlauf ($\Delta\varphi = 2\pi$)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \underbrace{2\pi f}_{Kreisfrequenz} \qquad T \text{ — Umlaufzeit (für vollen Umlauf)}$$

$$[f] = 1/\mathrm{s} = 1 \text{ Hertz (Hz)} \qquad f \text{ — Drehfrequenz, Drehzahl}$$

Radialbeschleunigung a_r (Zentripetalbeschleunigung)

$$a_r = v\,\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = v\,\omega$$

$$a_r = v\omega = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$$

$$a_r = -\vec{r}\,\omega^2 = -\frac{v^2}{r}\,\vec{e}_r = -\frac{v^2}{r}\,\frac{\vec{r}}{r} \qquad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{(Einheitsvektor)}$$

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}$$

Winkelbeschleunigung α

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dot{\omega}$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\varphi}$$

Bahnbeschleunigung a_s

$$a_s = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r\alpha \qquad \text{tangential gerichtet}$$

1.2 Dynamik der Punktmasse (NEWTONsche Mechanik)

Kraft $\vec{F}$, Ursache für Bewegungsänderung

$$[F] = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2} = \mathrm{N}$$

1.2.1 Erstes Newtonsches Axiom (Trägheitssatz)

Erstes Newtonsches Axiom Ist die auf einen Körper wirkende Kraft (oder die Summe aller dieser Kräfte) gleich Null, so verbleibt der Körper in der Ruhelage oder in gleichförmig geradliniger Bewegung (d. h. $\vec{v} = \text{const.}$).

1.2.2 Zweites Newtonsches Axiom (Grundgesetz der Mechanik)

Zweites Newtonsches Axiom Wirkt auf einen Körper eine Kraft, so tritt eine Beschleunigung auf.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

alternative Formulierung des Zweiten Newtonschen Axiomes (Newton)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m \cdot \vec{v}) = \vec{F}$$

Anmerkungen

- GALILEI 1632: $\vec{a} \propto \vec{F}$
- Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit
  - NEWTON (klassische Physik)

    $$m \neq f(\vec{v})$$
  - heute

    $$m(v) = \frac{m_{\text{Ruhe}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
    $$c = 2.998 \cdot 10^8 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$
    für $v \ll c$ $(v < 1\% \ c)$ $m = \text{const}$

1.2.3 Drittes Newtonsches Axiom (Reaktionsprinzip)

Drittes Newtonsches Axiom Eine Kraft ruft eine gleich große Gegenkraft hervor. (Actio = Reactio)

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Gravitationskraft

$$a_2 = \frac{M_1}{R^2} \cdot \gamma \qquad \gamma \text{ — Gravitationskonstante}$$
$$a_1 = \frac{M_2}{R^2} \cdot \gamma \qquad \gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \ \text{m}^3 \ \text{kg}^{-1} \ \text{s}^{-2}$$

schwere Masse ist die Fähigkeit, einen anderen Körper zu beschleunigen. Einheit: $[m] = 1$ kg

träge Masse ist das Maß für die Fähigkeit, einer Beschleunigung bei sich selbst Widerstand zu leisten. Einheit: $[m] = 1$ kg

- 1665 NEWTON: “Warum fällt der Apfel vom Baum?”

  $\rightarrow$ Gravitationskräfte wirken zwischen beliebigen Massen

$$F \propto M_1$$
$$F \propto M_2$$
$$a_2 = \gamma \frac{M_1}{R^2} \quad \rightarrow \quad F = M_2 \cdot a_2 = \gamma \frac{M_2 \cdot M_1}{R^2}$$
$$a_1 = \gamma \frac{M_2}{R^2} \quad \rightarrow \quad F = M_1 \cdot a_1 = \gamma \frac{M_1 \cdot M_2}{R^2}$$

$$|F_{12}| = |F_{21}|$$

1.2.4 Gravitationsgesetz

$$F = \gamma \frac{M_1 \cdot M_2}{R^2} \qquad\qquad \gamma \cdot \frac{M_1}{R^2} = g = f\left(\frac{1}{R^2}\right)$$
$$\vec{F} = M_2 \cdot \vec{g}$$
$$\vec{F} = m \cdot \vec{g}$$

Beispiel

- Aufzug fährt nach unten, $a < g$
- Ball fällt im Aufzug
  - für Beobachter außen: Ball fällt mit g
  - für Beobachter innen: Ball fällt mit (g-a)
- bei $a = g \quad \rightarrow \quad$ Schwerelosigkeit

1.3 Arbeit und Energie

- eine Form der Energie ist die Arbeit
- Definition der Arbeit

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} \qquad \text{(Skalarprodukt)}$$
$$W = F_s \cdot s \qquad F_s \text{ — Komponente der Kraft in Richtung des Weges}$$
$$F = F_\perp + F_s$$
$$|F_s| = |F| \cdot \cos\alpha$$
$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{s}| \cdot \underbrace{|\vec{F}| \cdot \cos(\vec{F}, \vec{s})}_{F_s}$$
$$W = \int \vec{F} \mathrm{d}\vec{s}$$
$$[W] = \mathrm{J} = \mathrm{Nm} = \frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^2}$$

Arbeit Die durch die Kraft $\vec{F}$ am System verrichtete Arbeit erhöht die Energie des Systems.

1.3.1 Beschleunigungsarbeit → kinetische Energie

Beschleunigungsarbeit Arbeit gegen den Trägheitswiderstand

$$W = \int F \cdot \mathrm{d}s \qquad F = m \cdot a = m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$
$$= \int m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}s = m \int \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}s = m \int \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}v} \mathrm{d}v = m \int v \mathrm{d}v$$
$$= \frac{1}{2} m \cdot v^2 = W_{\mathrm{kin}}$$

$$W_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

1.3.2 Hubarbeit → potentielle Energie

Hubarbeit Arbeit gegen die Schwerkraft

$$W_{\text{pot}} = F \cdot s = m \cdot g \cdot h$$
$$W = \sum_{i=0}^{\infty} F_s \cdot \Delta s_i$$
$$W = \int \vec{F}_s \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_0^h m \cdot g \cdot \mathrm{d}s = [m \cdot g \cdot h]_0^h = m \cdot g \cdot h$$

$$W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$$

- Die Änderung der potentiellen Energie eines Systems ist die Hubarbeit, die ich in das System stecke.
- Die Hubarbeit im Schwerefeld der Erde ist unabhängig vom Weg:

$$\underset{\text{Weg 1}}{\int_{P_1}^{P_2} F \,\mathrm{d}s} = \underset{\text{Weg 2}}{\int_{P_1}^{P_2} F \,\mathrm{d}s}$$
$$\oint F \,\mathrm{d}s = 0$$

- das Integral über einen geschlossenen Weg ist Null

  → das Kraftfeld ist konservativ

1.3.3 Energieerhaltung

Energieerhaltung In einem abgeschlossenen System ist die Summe

$$W_{\text{kin}} + W_{\text{pot}} = \text{const},$$

sie ändert sich nicht zeitlich, bleibt erhalten; d. h., die Gesamtenergie bleibt erhalten.

Bsp. 1: Pendel

- Umkehrpunkte (P_1, P_2)

$$v = 0$$
$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = 0$$
$$E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$$

- tiefster Punkt (P_0)

$$v = \text{max.}$$
$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{max.}}^2$$
$$E_{\text{pot}} = 0$$

Bsp. 2: Looping

- Um wieviel höher als der Looping (mit Radius r) muß der Startpunkt sein ($h=$?)?

$$\begin{aligned} F_s &= m \cdot g && F_s \text{ — Schwerkraft} \\ F &= \frac{v^2}{r} \cdot m && F \text{ — Fliehkraft} \\ m \cdot g \cdot h &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 && E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}} \\ 2gh &= v^2 \\ m \cdot g &= m \cdot \frac{v^2}{r} && F_s = F \\ g &= \frac{2gh}{r} \\ h &= \frac{r}{2} \end{aligned}$$

1.3.4 Leistung P

Leistung P, die pro Zeiteinheit verrichtete Arbeit.

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad [P] = \text{Watt} = \text{W} = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3}$$

Wirkungsgrad η, Quotient aus der abgegebenen effektiven Leistung P_{eff} und der zugeführten Nennleistung P_{N}:

$$\eta = \frac{P_{\text{eff}}}{P_{\text{N}}}$$

1.4 Dynamik von Punktmassen–Systemen

1.4.1 Impuls & Impulserhaltung

- Für eine Kraftwirkung ist die Geschwindigkeit entscheidend
- Für eine Kraftwirkung ist die Masse entscheidend

Impuls

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \qquad [p] = 1\,\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 1\,\text{Ns}$$

Kraft ist die erste zeitliche Ableitung des Impulses

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\underbrace{m \cdot \vec{v}}_{\vec{p}}) = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{p}}$$

Impulserhaltung In einem abgeschlossenen System bleibt der Gesamtimpuls $\vec{P}$ erhalten:

$$\vec{P} = \sum \vec{p} = \text{const}$$

- abgeschlossenes System (keine äußere Kraft)

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}} &= F = 0 \\ \dot{\vec{p}} &= 0 = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \\ \vec{p} &= \text{const.} && \text{allg. } \sum_i p_i = \text{const} \end{aligned}$$

Bsp.: Raketenantrieb (Rückstoßprinzip)

$$\dot{\vec{p}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m \cdot \vec{v}) = v \cdot \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$v_0 \mathrm{d}m = -m \mathrm{d}v \qquad v_0 \text{ — Ausströmgeschwindigkeit der Gase} \approx 2000 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$-\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{\mathrm{d}v}{v_0}$$

$$-\int \frac{\mathrm{d}m}{m} = \int \frac{\mathrm{d}v}{v_0}$$

$$-\ln m = \frac{1}{v_0} v + \mathrm{const} \qquad \mathrm{const} = \ln m_0$$

$$\ln \frac{m}{m_0} = -\frac{v}{v_0}$$

$$\frac{m}{m_0} = e^{-\frac{v}{v_0}} \qquad \text{ZIOLKOWSKIsche Raketengleichung}$$

erste kosmische Geschwindigkeit

- notwendig, um das Schwerefeld der Erde zu verlassen
- $\approx 7900 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
- Herleitung vgl. 1.7.2, S. 22

1.4.2 Massenmittelpunkt (MMP)

Massenmittelpunkt Schwerpunkt, Punkt in einem Massenpunktsystem, dessen Ortsvektor $\vec{R}$ sich aus den Massen m_i und den Ortsvektoren $\vec{r}_i$ berechnet nach:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \qquad M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

- 2 Teilchen
- 1 Dimension

$$\text{MMP } x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Verallgemeinerung

$$m_{\text{gesamt}} \cdot x_s = \sum_i m_i \cdot x_i$$

bei kontinuierlicher Verteilung der Massen

$$m_{\text{ges}} \cdot x_s = \int x \, \mathrm{d}m \qquad x_s \text{ — Koordinaten der Massepunkte}$$

- Impulserhaltung
  - Gleichgewicht der internen Kräfte

$$|F_{\text{int},1}| = |F_{\text{int},2}|$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_1 \cdot v_1) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_2 \cdot v_2)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{(m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2)}_{\underbrace{\sum_i m_i v_i}_{Gesamtimpuls} = \mathrm{const}} = 0$$

- Zusammenfassung

$$x_s = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \qquad\qquad v_s = \frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t}$$

  - Wenn keine externen Kräfte Wirken, befindet sich der MMP in Ruhe oder bewegt sich geradlinig gleichförmig (1. N. A.).
  - Der MMP verhält sich wie eine Punktmasse mit $m_{\mathrm{ges}} = \sum_i m_i$
  - Interne Kräfte heben sich gegegnseitig auf (3. N. A.).
  - Externe Kräfte bewegen das System und dabei ist das System durch seinen MMP beschreibbar:

$$\vec{F}_{\mathrm{ext}} = m_{\mathrm{ges}} \cdot \vec{a}_s \qquad \text{(2. N. A.)}$$

$\vec{a}_s$ — Beschleunigung des MMP

  - Der MMP bewegt sich unter dem Einfluß externer Kräfte wie eine Punktmasse mit $m_{\mathrm{ges}} = \sum_i m_i$ (als sei die Gesamtmasse in ihm vereinigt).

- Bsp.: Rakete
  - $m_1 = 500$ kg, $m_2 = 10$ kg
  - Abstoß der Kapsel mit $0.51\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
  - abgeschlossenes System
  - Impulserhaltung

$$(m_1 + m_2)v = m_1 v_1 + m_2 v_2 \tag{1.1}$$
$$\Delta v = v_2 - v_1 = 0.51\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{1.2}$$
$$v_2 = v_1 + \Delta v \tag{1.3}$$

(3) in (1)

$$v_1 = v - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \Delta v = 7999\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{1.4}$$
$$v_2 = 8000.5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{1.5}$$

  - Die Lage des MMP ändert sich und seine Geschwindigkeit bleibt v.

1.4.3 Stoßgesetze

- Zusammenstoß $\rightarrow$ Freisetzung großer Kräfte
  - Billiardkugeln
  - Sterne
  - Autos
  - Hammer & Amboß

Kraftstoß gibt die Änderung $\Delta\vec{p}$ des Impulses an. Entscheidend ist die Dauer Δt des Stoßes.

$$\vec{F} \cdot \Delta t = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}t = I = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right) \cdot \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}p = p_2 - p_1 = \Delta p$$
$$\langle\vec{F}\rangle \Delta t = \Delta\vec{p}$$
$$\langle\vec{F}\rangle = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \qquad \text{Kraftstoß}$$

Bsp. 1: Aufprall nach freiem Fall

- $m = 1$ kg, $h = 20$ m, $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$ s

$$\begin{aligned} m \cdot g \cdot h &= \frac{m}{2} v^2 \\ v &= \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \\ F_s = m \cdot g &= 1\,\mathrm{kg} \cdot 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 10\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Impuls

$$\begin{aligned} p &= m \cdot v \\ p &= m \cdot \sqrt{2g \cdot h} && \text{vor dem Stoß} \\ p' &= 0 && \text{nach dem Stoß} \end{aligned}$$

Impulsänderung

$$\begin{aligned} \Delta p &= p - p' = m \cdot \sqrt{2gh} \\ \langle F \rangle &= \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m\sqrt{2gh}}{1 \cdot 10^{-3}} = \frac{1\,\mathrm{kg}\,\sqrt{2 \cdot 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 20\,\mathrm{m}}}{1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}} \\ \langle F \rangle &= \frac{20\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^2 \cdot 10^3}{\mathrm{s}} = 20\,000\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Bsp. 2: Auto

- $m = 1.5$ t, $v = 20\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} = 72\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$
- fährt gegen Baum
- $\Delta t = 3 \cdot 10^{-2}$ s bis das Auto steht

$$F = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = 1 \cdot 10^6\,\mathrm{N}$$

elastischer Stoß mechanische Gesamtenergie und Gesamtimpuls bleiben erhalten

1. zentraler elastischer Stoß
   - es gelten
     (a) Impulssatz

     $$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

     (b) Energiesatz

     $$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$$

   - Spezialfall: m_2 vor dem Stoß in Ruhe, $v_2 = 0$

     $$\begin{aligned} u_2 &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \\ u_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \end{aligned}$$

   - Spezialfall: System, in dem $m_1 = m_2$

     $$\begin{aligned} v_1 &\neq 0 \qquad u_2 = v_1 \\ v_2 &= 0 \qquad u_1 = 0 \end{aligned}$$

     d. h., die Geschwindigkeiten werden ausgetauscht

2. nicht zentraler elastischer Stoß
   - Bsp.: Billiard (ohne Reibung)
   - es gelten

     (a) Impulserhaltung

     $$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$
     $$v_1^2 = u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2$$
     $$v_1^2 = u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2 \cdot \underbrace{\cos\alpha}_{=0} \qquad \alpha = 90^\circ$$

     (b) Energieerhaltung

     $$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}mu_2^2$$

inelastischer Stoß

- Verlust an kinetischer Energie (d. h. Wärme, Verformung, ...)
- Extremfall: total unelastischer Stoß
  - "verknautschte Massen"
  - nach dem Stoß bleiben beide Massen zusammen
- Impulserhaltung (gilt immer)

  $$\underbrace{m_1v_1 + m_2v_2}_{\text{vor dem Stoß}} = \underbrace{(m_1 + m_2)u}_{\text{nach dem Stoß}}$$

- Energiesatz

  $$\underbrace{\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2}_{\text{vor dem Stoß}} = \underbrace{\frac{m_1 + m_2}{2}u^2 + \Delta E}_{\text{nach dem Stoß}}$$

1.5 Mechanik starrer Körper

- PM $\rightarrow$ MMP $\rightarrow$ starrer Körper

starrer Körper Masseelemente Δm eines Körpers werden durch äußere Einwirkung (externe Kräfte) nicht verschoben. (Gegensatz: deformierbare Medien)
Es können nur Translation und Rotation der Masseelemente Δm auftreten $\rightarrow$ 6 Freiheitsgrade.

- 2 neue Größen
  - Drehmoment
  - Drehimpuls

Drehmoment $\vec{M}$ das Produkt aus dem Betrag der angreifenden Kraft $\vec{F}$ und der Länge l des Hebelarmes zu einem Bezugspunkt, an dem der Körper drehbar gelagert ist (Drehpunkt).

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \vec{r} \text{ — Ortsvektor vom Dreh– zum Angriffspunkt der Kraft}$$
$$|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin(\underbrace{\vec{r}, \vec{F}}_{\alpha})$$
$$|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot l \qquad l \text{ — kürzester Abstand der Kraftwirkungslinie z. Drehpkt.}$$
$$l = r\sin\alpha \qquad \alpha \text{ — Winkel zwischen } \vec{r} \text{ und } \vec{F}$$
$$[M] = 1\,\text{N} \cdot \text{m}$$

- der Vektor des Drehmomentes zeigt entlang der Drehachse
  - Rechte–Hand–Regel

1.5.1 Gleichgewichtsbedingungen

- Kräfte sind entlang ihrer Wirkungslinie verschiebbar
- Gleichgewichtsbedingungen
  1. Ausschluß der Translation

     $$\sum \vec{F}_j = \vec{F}_{\text{res}} = 0$$

     $\rightarrow$ keine Translation, aber Rotation tritt auf
  2. Ausschluß der Rotation

     $$\sum \vec{M}_j = \vec{M}_{\text{res}} = 0$$

Gleichgewicht Ein Körper ist im Gleichgewicht, wenn die Summe der resultierenden Kräfte ($\sum \vec{F}_i$) und die Summe der Drehmomente ($\sum \vec{M}_i$) verschwindet

1. stabiles Gleichgewicht
   - $\frac{\partial^2 W_{\text{pot}}}{\partial x^2} > 0$
2. indifferentes Gleichgewicht
   - kann nicht selbst in den ursprünglichen Zstand zurückkehren
   - $\frac{\partial^2 W_{\text{pot}}}{\partial x^2} = 0$
3. labiles Gleichgewicht
   - $\frac{\partial^2 W_{\text{pot}}}{\partial x^2} < 0$
   - kann nicht selbst in den ursprünglichen Zstand zurückkehren

1.5.2 Dynamik des starren Körpers

Trägheitsmoment (Drehmasse) J

$$J = mr^2 \qquad [J] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$$

$$J = \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

$$J = \int r^2 \, \mathrm{d}m \qquad \text{allgemeine Definition des Massenträgheitsmomentes}$$

1. Es gibt unendlich viele Trägheitsmomente bei einem Körper
2. Drei Hauptträgheitsachsen durch den Schwerpunkt (J_s)
3. $J_{s,\text{rot}}$ (um die Rotationssymmetrieachse) ist am kleinsten

- Beispiel: J_s für Zylinder

$$
\begin{aligned}
J &= \int r^2 \, \mathrm{d}m \qquad\qquad r = f(m) \\
V &= \pi r^2 h \\
m &= V \cdot \rho = \rho \cdot \pi r^2 h \\
\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r} &= \rho\pi h 2r \\
\mathrm{d}m &= \rho\pi h 2r \, \mathrm{d}r \\
J &= \int r^2 \cdot \rho \cdot \pi \cdot h \cdot 2r \, \mathrm{d}r = \rho \cdot \pi \cdot 2h \int_0^R r^3 \, \mathrm{d}r \\
J &= \rho\pi h 2[\frac{1}{4}R^4] \\
J &= \frac{1}{2} \underbrace{\rho\pi h R^2}_{m} \cdot R^2 \\
J_s &= \frac{1}{2} m R^2
\end{aligned}
$$

kinetische Energie

$$
\begin{aligned}
W_{\mathrm{kin}} &= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\omega r)^2 \\
W_{\mathrm{kin}} &= \frac{1}{2} (m r^2) \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2
\end{aligned}
$$

- Analogie zur Translation

$$
W_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{trans}} = \frac{1}{2} m v^2
$$

1.5.3 Satz von Steiner

- Stellt eine Beziehung zwischen dem Massenträgheitsmoment bezüglich einer Achse X_S, die durch den Schwerpunkt des Körpers geht, und einer beliebigen anderen dazu parallelen Achse X her.

Satz von Steiner Das Massenträgheitsmoment bezüglich einer beliebigen Achse, deren kleinster Abstand vom Schwerpunkt des Körpers r_S ist, lautet:

$$
J_X = m r_S^2 + J_S
$$

Herleitung

$$
\begin{aligned}
W_{\mathrm{kin}} &= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2 && v = r \cdot \omega \\
&= \frac{1}{2} (\underbrace{m \cdot r^2 + J_S}_{J_{\mathrm{ges}}}) \omega^2 && r \text{ — Abstand vom Schwerpunkt} \\
J_{\mathrm{ges}} &= J_S + m r^2 \\
J_X &= J_S + m r_S^2
\end{aligned}
$$

1.5.4 Analogien zwischen Translation und Rotation

Arbeit

$$
W = \int \vec{F} \, \mathrm{d}\vec{s} \qquad\qquad W = \int \underbrace{\vec{F}\vec{r}}_{\vec{M}} \, \mathrm{d}\vec{\varphi} = \int \vec{M} \, \mathrm{d}\vec{\varphi}
$$

Bewegungsgleichung

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \vec{M} = J \cdot \vec{\alpha}$$

Impuls und Drehimpuls

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{p}} \qquad \vec{M} = J\vec{\alpha} = J \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J \cdot \vec{\omega}) = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{L}}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \vec{L} = J\vec{\omega}$$

1.5.5 Drehimpuls $\vec{L}$

Drehimpuls Drall, $\vec{L}$, Produkt aus Massenträgheitsmoment J_X bezüglich der Drehachse X und Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$

$$\vec{L} = J_X \cdot \vec{\omega}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad (\vec{p} = m\vec{v}) \qquad \vec{r} \text{ — Abstand zur Drehachse}$$

$$[L] = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}$$

- Der Drehimpulsvektor zeigt in Richtung der Drehachse.
  - $\vec{r}$ und $\vec{p}$ stehen senkrecht auf $\vec{L}$ (Rechte–Hand–Regel)
- Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist gleich dem resultierenden Drehmoment

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}} \qquad (\vec{F} = \dot{\vec{p}})$$

Drehimpulserhaltungssatz Der Drehimpuls bleibt erhalten, wenn kein äußeres Drehmoment angreift (abgeschlossenes System).

$$\vec{M} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \vec{L} = \text{const.}$$

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega} \qquad \text{im abgeschlossenen System}$$

1.6 Schwingungen

Schwingung ist die zeitlich periodische Änderung einer physikalischen Größe

1.6.1 harmonische Schwingungen

- mit einer Sinus– oder Cosinusfunktion beschreibbar
- leichte Auslenkung aus der Ruhelage, so daß das HOOKEsche Gesetz gilt

  Auslenkung $x \propto F$

- elastische Kräfte

Hookesches Gesetz Die rücktreibende Kraft ist proportional zur Auslenkung und ihrer Richtung entgegengesetzt:

$$F_R \propto x \qquad F_R \text{ — rücktreibende Kraft}$$

$$F_R = -Dx \qquad D \text{ — Federkonstante}$$

Bsp. 1: Federschwinger

Bewegungsgleichung für harmonischen Oszillator

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= F = -Dx && \text{2. N. A.}\\
\frac{m}{D}\ddot{x} + x &= 0\\
x &= x(t)\\
x &= x_0 \cdot \sin(\omega t)\\
\dot{x} &= x_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)\\
\ddot{x} &= -x_0 \cdot \omega \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)\\
-\frac{m}{D}x_0 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) + x_0 \cdot \sin(\omega t) &= 0\\
-\frac{m}{D}\omega^2 + 1 &= 0\\
\omega^2 &= \frac{D}{m}\\
\omega &= \sqrt{\frac{D}{m}}
\end{aligned}
$$

$$x = x_0 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right)$$

x_0	—	Amplitude (maximale Auslenkung)
$x(t)$	—	Elongation (momentane Auslenkung)
T	—	Schwingungsperiode
ω	—	Kreisfrequenz
φ_0	—	Phase

$$\omega = 2\pi f \qquad f = \frac{1}{T} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

allgemeine Schwingungsgleichung

$$x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Federschwinger

$$
\begin{aligned}
\omega &= \sqrt{\frac{D}{m}}\\
T &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}
\end{aligned}
$$

Bsp. 2: mathematisches Pendel (Fadenpendel)

- mathematisches Pendel
  - nichtdehnbarer Faden mit vernachlässigbarer Masse
  - reibungsfreie Aufhängung des Pendels
  - punktförmige Masse des Pendelkörpers

$$
\begin{aligned}
\vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F}\\
|\vec{M}| &= |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin(\vec{r}, \vec{F})\\
M_R &= -mgl\sin\varphi && \text{rücktreibendes Drehmoment}
\end{aligned}
$$

Bewegungsgleichung

$$\vec{M} = J \cdot \alpha \qquad \text{2. N. A.}$$
$$J \cdot \ddot{\varphi} + mgl \sin\varphi = 0$$
$$ml^2 \varphi + mlg\varphi = 0$$
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \sin(\omega t)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Bsp. 3: physikalisches Pendel

- physikalisches Pendel, physisches Pendel, Schwerependel
- starrer Körper, der unter der Wirkung der Schwerkraft Drehbewegungen um eine feste Achse A, die nicht durch seinen Schwerpunkt geht, ausführt.

Bewegungsgleichung

$$\ddot{\alpha} = -\frac{lmg}{J_A}\alpha$$
$$\alpha(t) = \alpha_{\max}\cos(\omega t + \varphi)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J_A}}$$
$$F = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgl}{J_A}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{mgl}}$$

Eigenfrequenz

- Jedes schwingungsfähige System hat eine Eigenfrequenz f_0
- Bsp.:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} \qquad\qquad f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

1.6.2 Kenngrößen einer harmonischen Schwingung

$$u(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Phase, Phasenwinkel Argument der Sinus– oder Cosinusfunktion, $\omega t + \varphi$; bestimmt den momentanen Schwingungszustand.

Nullphasenwinkel, Anfangsphase φ, Wert der Phase für $t = 0$, beschreibt den Anfangszustand des Systems.

Amplitude A, maximaler Wert der Funktion $u(t)$

$$u(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Kreisfrequenz ω

$$\omega = 2\pi f$$

Periodendauer T, kleinste Zeitdauer, nach der sich bestimmte zeitlich periodische Erscheinungen wiederholen.

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Frequenz f, gibt an, wie oft sich ein zeitlich periodischer Vorgang pro Sekunde wiederholt

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

1.6.3 Energiebilanz beim harmonischen Schwinger

$$F = -Dx$$

$$W_p = -\int \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s} = \int_0^x -Dx\,\mathrm{d}x = -D\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^x$$

1. Auslenkung um x

$$W_p = -\frac{1}{2}Dx_0^2 \qquad \text{Anfangsenergie}$$

2. Energieerhaltung

$$W_{\text{pot}} + W_{\text{kin}} = -\frac{1}{2}Dx_0^2$$

3. Berechnung der kinetischen Energie

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cdot \sin(\omega t) \\ \dot{x} &= x_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \\ \dot{x}_{\max} &= x_0 \cdot \omega \qquad \text{für } \cos\,\omega = 1 \\ W_{\text{kin}} &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m(x_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t))^2 \end{aligned}$$

4. potentielle Energie

$$W_{\text{pot}} = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}D(x_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t))^2 \qquad \begin{aligned} \cos^2(\omega t) &= \frac{1}{2}(1+\cos(2\omega)) \\ \sin^2(\omega t) &= \frac{1}{2}(1-\cos(2\omega)) \end{aligned}$$

5. Summenbildung (Energieerhaltung)

$$W_{\text{pot}} + W_{\text{kin}} = -\frac{1}{2}Dx_0^2\underbrace{(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))}_{1}$$

- W_{pot} und W_{kin} pulsieren mit 2ω
- im zeitlichen Mittel entfällt die Gesamtenergie auf beide zu gleichen Teilen

1.6.4 Schwingungsarten

freie, ungedämpfte Schwingung Die Schwingung wird einmalig angeregt und verläuft dann ohne äußere Anregung. Die Frequenz ist konstant und durch Systemgrößen bestimmt.

$$x = x_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

freie, gedämpfte Schwingung Es treten Reibungskräfte auf. Der Oszillator verliert ständig Energie.

$$\begin{aligned} F_{\text{Rück}} &= -Dx \\ F_{\text{Reib}} &= -k\dot{x} \\ m\ddot{x} &= -Dx - k\dot{x} \\ \frac{m}{D}\ddot{x} + \frac{k}{D}\dot{x} + x &= 0 && \text{homogene DGL 2. Ordnung} \\ x(t) &= x_0 e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t) && \text{Lösung der DGL} \\ \delta &= \frac{k}{2m} && \delta \text{ — Abklingkoeffizient} \\ \omega_0 = 2\pi f_0 &= \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}} \end{aligned}$$

erzwungene Schwingung Der Oszillator wird von einer äußeren periodischen Kraft zum Schwingen angeregt.

Resonator Der Oszillator schwingt mit der Frequenz der äußeren Kraft.

Bewegungsgleichung

$$\underbrace{m\ddot{x} + k\dot{x} + Dx}_{\text{schwingungsfähiges System}} = \underbrace{l_0 \cdot \cos(\omega_{\text{err}} \cdot t)}_{\text{antreibendes System}}$$

- das schwingungsfähige System (Eigenfrequenz f_0) schwingt mit der Erregerfrequenz

$$f_{\text{err}} = 2\pi\omega_{\text{err}}$$

Resonanz heißt die maximale Amplitude des schwingungsfähigen Systems. Sie tritt für

$$f_0 = f_{\text{err}}$$

auf.

1.7 Zusammenfassung

1.7.1 Erhaltungssätze in der Mechanik

Energieerhaltung In einem abgeschlossenen System bleibt bei allen physikalischen Vorgängen die Gesamtenergie konstant. Energie kann nur in verschiedene Energieformen umgewandelt oder zwischen Teilsystemem ausgetauscht werden.

$$\sum E_i = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} + \ldots = \text{const.}$$

Impulserhaltung Wenn keine äußeren Kräfte wirken, dann bleibt der Gesamtimpuls erhalten.

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \text{const.}$$

Drehimpulserhaltung In einem abgeschlossenen System von Massenpunkten bleibt der Gesamtdrehimpuls erhalten.

$$\vec{I} = \sum_{i=1}^{N} \vec{I}_i = \text{const.}$$

Masseerhaltung Für $v \ll c$ gilt für Körper:

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i = \text{const.}$$

1.7.2 Herleitung der ersten kosmischen Geschwindigkeit (Impulserhaltung)

erste kosmische Geschwindigkeit Kreisbahngeschwindigkeit, v_K, Geschwindigkeit, die ein Körper haben muß, um sich auf einer Kreisbahn nahe der Erdoberfläche zu bewegen; folgt aus dem Gleichgewicht von Zentrifugalkraft und Gravitationskraft der Erde.

Gravitationsgesetz

$$F = \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \gamma \tag{1.1}$$

2. Newtonsches Axiom

$$F = m \cdot a \tag{1.2}$$

(1.2) in (1.1)

$$\frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \gamma = m_2 \cdot a \tag{1.3}$$

Zentripetalbeschleunigung bei Kreisbahn

$$a = \frac{v^2}{r} \tag{1.4}$$

$$\frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \gamma = m_2 \cdot \frac{v^2}{r} \tag{1.5}$$

$$v^2 = \frac{m}{r} \cdot \gamma \tag{1.6}$$

erste kosmische Geschwindigkeit

$$v_K = \sqrt{\frac{m}{r} \cdot \gamma} \qquad \begin{array}{lll} m & \text{—} & \text{Erdmasse } (6 \cdot 10^{24}\ \text{kg}) \\ r & \text{—} & \text{Erdradius } (6378\ \text{km}) \end{array} \tag{1.7}$$

1.7.3 Begriff der Arbeit

Arbeit Die mechanische Arbeit ist das Wegintegral der Kraft:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \mathrm{d}\vec{s}$$

1.7.4 Vergleich der Mechanik der PM und des starren Körpers (Analogiebeziehungen)

- Gesetze der Translation (starrer Körper) stimmen vollständig mit denen für Punktmassen (PM) überein

	Translation	Rotation
Geschwindigkeit	$v = \dot{x}$	$\omega = \dot{\varphi}$
Beschleunigung	$a = \dot{v} = \ddot{x}$	$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$
Arbeit	$W = \int \vec{F} \mathrm{d}\vec{s}$	$W = \int \vec{M} \mathrm{d}\vec{\varphi}$
Bewegungsgleichung	$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{M} = J\vec{\alpha}$
Impuls/Drehimpuls	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = J\vec{\omega}$

Kapitel 2

Thermodynamik

2.1 Grundlagen

2.1.1 Hydrostatischer Druck

Hydrostatik Lehre von den ruhenden Flüssigkeiten

Druck

$$\text{Druck} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} \qquad p = \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

Pascalsches Prinzip Wird der Druck p_0 auf einen Teil der Flüssigkeitsoberfläche ausgeübt, so überträgt er sich auf alle Teile der Oberfläche.

Berücksichtigung der Schwerkraft

$$F = p_0 \cdot A$$
$$F = p_0 \cdot A + m \cdot g$$
$$F = p_0 \cdot A + \underbrace{\rho \cdot A \cdot h}_{m} \cdot g$$

Druck unten

$$p_u = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$$

Beispiel: Barometer

$$p_0 = \rho \cdot g \cdot h \qquad \rho \text{ — gemittelte Dichte der Luft}$$
$$p = 1.01 \cdot 10^5 \,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \text{ atm}$$
$$1\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Pa} \qquad 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$$

Rohr mit Quecksilber

$$\rho_{\text{Hg}} = 13.6 \cdot 10^3 \,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \qquad 13.6\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$
$$p = \rho_{\text{Hg}} \cdot g \cdot h \qquad h \text{ — Höhe der Hg–Säule}$$
$$p = p_0$$
$$h = 76 \text{ cm} \qquad 760 \text{ mm Hg–Säule = 760 Torr (10.3 m Wassersäule)}$$

2.1.2 Der Auftrieb (Archimedisches Prinzip)

Auftriebskraft F_A, der Gewichtskraft entgegengerichtet; identisch mit der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeitsmenge.

$$\vec{F}_A = m_w \cdot g = \rho_w \cdot V_k \cdot g$$
$$\vec{F}_S = m \cdot g = \rho_k \cdot V_k \cdot g \qquad \vec{F}_S \text{ — Schwerkraft}$$

Schwimmen

$$|F_A| > |F_S|$$
$$\rho_{Fl} > \rho_k$$

Schweben

$$|F_A| = |F_S|$$
$$\rho_{Fl} = \rho_k$$

Sinken

$$|F_A| < |F_S|$$
$$\rho_{Fl} < \rho_k$$

Ursache des Aufriebs ist der höhere Druck unten

$$\begin{aligned}
F_1 &= p_L \cdot A + m_1 \cdot g \\
F_1 &= p_L \cdot A + \rho_w \cdot h \cdot A \cdot g \\
F_2 &= p_L \cdot A + m_1 \cdot g + m_2 \cdot g \\
F_2 &= p_L \cdot A + h \cdot A \cdot \rho_w \cdot g + l \cdot A \cdot \rho_w \cdot g \\
F_2 &> F_1 \\
F_{\text{Auftrieb}} &= F_2 - F_1 = l \cdot a \cdot \rho_w \cdot g = m_{\text{Fl}} \cdot g
\end{aligned}$$

2.2 Ideales Gas

2.2.1 Zustandsgrößen

Volumen V,

$$[V] = \text{m}^3$$

Dichte ρ,

$$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Druck p,

$$[p] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pascal (Pa)}$$

Temperatur T,

$$[T] = \text{Kelvin (K)}$$

2.2.2 Zustandsgleichung

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \qquad R \text{ — universelle Gaskonstante}$$

2.2.3 Atomistische Deutung der Zustandsgrößen Druck und Temperatur

Druck

$$\text{Druck} = \text{Stoßzahl} \cdot \underbrace{\frac{\text{Impulsänderung}}{\text{Zeiteinheit}}}_{\text{Kraft}} \cdot \frac{1}{\text{Fläche}}$$

Impulsänderung

$$\Delta\tilde{p} = m\bar{v} \qquad \bar{v} \text{ — mittlere Geschwindigkeit der Teilchen}$$

Temperatur ergibt sich aus der kinetischen Energie der Gasatome.

2.3 Kinetische Theorie der Wärme

2.3.1 Temperaturbegriff

2.3.2 Wärmeenergie & Nullter Hauptsatz der Thermodynamik

Nullter Hauptsatz der Thermodynamik Alle Systeme, die mit einem System im thermischen Gleichgewicht stehen, sind auch untereinander im thermischen Gleichgewicht.

R: Wärmekapazität & spezifische Wärme

2.4 Hauptsätze der Thermodynamik

2.4.1 Erster Hauptsatz der Thermodynamik

Erster Hauptsatz Die Änderung der inneren Energie eines abgeschlossenen Systems ist gleich der Summe der von außen zugeführten Wärmemenge und der am System verrichteten Arbeit.

Es gibt kein Perpetuum mobile erster Art.

Energie kann weder erschaffen noch vernichtet werden.

2.4.2 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

Zweiter Hauptsatz Wärme kann nicht vollständig in mechanische oder elektrische Energie umgewandelt werden.

Es gibt keine natürlichen Prozesse, in denen die Gesamtentropie abnimmt.

Zweiter Hauptsatz (Thomson–Formulierung) Es ist unmöglich, eine periodisch arbeitende Maschine zu bauen, die nichts anderes tut, als Wärme aus nur einem Wärmereservoir zu entnehmen und in mechanische Arbeit zu verwandeln.

Es gibt kein Perpetuum mobile zweiter Art.

Zweiter Hauptsatz (Clausius–Formulierung) Es ist unmöglich, eine periodisch arbeitende Kältemaschine zu bauen, die keinen anderen Effekt bewirkt, als Wärme von einem kälteren zu einem wärmeren Temperaturreservoir zu übertragen.

2.4.3 Dritter Hauptsatz der Thermodynamik

Dritter Hauptsatz Jeder Körper besitzt am absoluten Nullpunkt die Entropie Null.

Der absolute Nullpunkt ist nie experimentell erreichbar.

2.5 Zustandsänderungen

2.5.1 isotherme Zustandsänderung

isotherme Zustandsänderung Prozeß, bei dem die Temperatur konstant bleibt. Isothermen sind für das ideale Gas Hyperbeläste im p,V–Diagramm.

2.5.2 isobare Zustandsänderung

isobare Zustandsänderung Prozeß, bei dem der Druck konstant bleibt. Isobaren sind horizontale Geraden im p,V–Diagramm.

2.5.3 isochore Zustandsänderung

isochore Zustandsänderung Prozeß, bei dem das Volumen konstant bleibt. Isochoren sind vertikale Geraden im p,V–Diagramm.

2.5.4 adiabatische Zustandsänderung

adiabatische Zustandsänderung Prozeß, bei dem keine Wärme mit der Umgebung ausgetauscht wird. Adiabaten verlaufen im p,V–Diagramm steiler als Isothermen.

2.6 Carnotscher Kreisprozeß

Carnotscher Kreisprozeß idealisiertes Modell einer Wärmekraftmaschine zur Umwandlung von Wärme in mechanische Arbeit. Besitzt den maximal möglichen thermodynamischen Wirkungsgrad.

2.6.1 reversible und irreversible Prozesse

reversibler Prozeß Prozeß, der nur über Gleichgewichtszustände führt.

irreversibler Prozeß Prozeß, der nicht von selbst in umgekehrter Reihenfolge stattfinden kann.

2.6.2 Teilschritte des Carnotschen Kreisprozesses

1. isotherme Expansion bei hoher Temperatur
2. adiabatische Expansion unter Abkühlung
3. isotherme Kompression bei niedriger Temperatur
4. adiabatische Kompression mit Erwärmung

2.7 Entropie

Entropie S, extensive Zustandsfunktion, die die “Unordnung” in einem System beschreibt.
Beschreibt die Anzahl möglicher Mikrozustände in einem System.

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$$

2.7.1 Entropie und Wahrscheinlichkeit

- hohe Ordnung unwahrscheinlich
- niedrige Ordnung wahrscheinlich

$$S = k \ln P$$

k — Boltzmann–Konstante
P — Wahrscheinlichkeit eines Zustandes

2.7.2 Entropie und Evolution

- Die belebte Natur besteht aus offenen Systemen.
- Evolution ist nur möglich auf Kosten einer Steigerung der Entropie der Umgebung des Organismus.

R: Der 1. HS der Thermodynamik

R: Kompressionsarbeit

R: Wärmekapazität eines idealen Gases

R: Adiabatische Zustandsänderung

Kapitel 3

Grundlagen der Elektrostatik

3.1 Einführung

Elektrostatik Lehre von den ruhenden Ladungen

Elektrische Ladung Q, Eigenschaft von Körpern, durch elektrische Felder Kräfte aufeinander auszuüben.

Ladung ist an Materie gebunden.

3.1.1 positive und negative Ladungen

Negative Ladungen Senken des elektrischen Feldes

positive Ladungen Quellen des elektrischen Feldes

Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an.

3.1.2 Elementarladung

- Die elektrische Ladung ist quantisiert, Ladung kommt nur als Vielfaches der Elementarladung vor.

Elementarladung e_0 kleinste in der Natur vorkommende elektrische Ladung

$$e_0 = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As}$$

spezifische Ladung des Elektrons

$$\frac{e}{m_e} = 1.758805 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{kg}}$$

3.1.3 Ladungserhaltung

Die Gesamtladung in einem abgeschlossenen System bleibt erhalten; Die Summe der positiven und negativen elektrischen Ladungen bleibt konstant:

$$\sum_i Q_i = \mathrm{const}$$

3.1.4 Leiter und Isolatoren

elektrischer Leiter Material, in dem frei verschiebbare Ladungsträger vorhanden sind; besitzt geringen elektrischen Widerstand. Die Ladungen befinden sich an der Oberfläche.

elektrischer Nichtleiter, Isolator Material, in dem keine freien Ladungsträger vorhanden sind; setzt dem elektrischen Strom einen sehr hohen elektrischen Widerstand entgegen.

3.1.5 Influenz und Polarisation

Influenz Verschiebung elektrischer Ladung in einem Leiter, wenn er in ein elektrisches Feld gebracht wird.

Polarisation Ausbildung von Dipolen innerhalb eines Nichtleiters durch Ladungsverschiebung in den Molekülen oder Atomen des Nichtleiters.

Ladungstrennung entsteht durch Influenz in einem Leiter, so daß in einigen Bereichen ein Überschuß positiver oder negativer Ladung vorherrscht. Der Leiter bleibt insgesamt elektrisch neutral.

3.1.6 Elektrische Feldlinien

Feldlinien dienen der Veranschaulichung der Kraftwirkung des elektrischen Feldes im Raum.

- Vereinbarungen
  - Richtung der Feldlinien in einem Punkt entspringt der Richtung der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ (Kraftwirkung auf eine positive Ladung in diesem Punkt)
  - Feldlinien zeigen von positiver (Quelle) zu negativer Punktladung (Senke)
- Folgen
  - keine geschlossenen Feldlinien in der Elektrostatik
    $\rightarrow$ das elektrostatische Feld ist wirbelfrei
  - Feldlinien können sich nicht schneiden. Die Richtung der Feldstärke ist für jeden Punkt eindeutig.
  - Die Feldliniendichte ist der Feldstärke proportional.

3.2 Coulombsches Gesetz

Coulombsches Gesetz beschreibt die Kraft, die zwei Punktladungen aufeinander ausüben. Es beruht auf Erfahrungstatsachen

Die Kraft $\vec{F}_{12}$ zwischen zwei Punktladungen Q_1 und Q_2 ist proportional dem Produkt der Ladungen und nimmt mit dem Quadrat des Abstandes r_{12} der Ladungen ab. Sie ist eine Zentralkraft: Die Kraft wirkt in der Verbindungslinie der Ladungen.

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

Herleitung

$$F \propto Q_1$$
$$F \propto Q_2$$
$$F \propto \frac{1}{r^2}$$
$$F \propto \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

Gesetz

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

$$\varepsilon_0 = 8.859 \cdot 10^{-12} \frac{(\mathrm{As})^2}{\mathrm{Nm}^2} \qquad \text{Dielektrizitätskonstante}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \qquad \text{Vektorschreibweise}$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Faktorisierung

$$F = Q_2 \cdot E$$

$$\vec{F} = Q_2 \cdot \vec{E} \qquad \text{mit } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$F = Q \cdot E$$

- Schritt: Verschieben der Ladung Q_2 ins Unendliche
- eine einzelne Ladung im Raum erzeugt ein elektrisches Feld (Kraftfeld)
- dieses Feld kann mit einer Probeladung (2. Ladung) ausgemessen werden
- jedem Punkt im Raum wird ein Kraftvektor (Pfeil) zugeordnet

  Kraftfeld $F = Q_{\text{Probeladung}} \cdot E$ $\qquad$ E — elektrisches Feld der Ladung Q_1

- Konvention
  - positive Ladung
    * Ausgangspunkt (Quelle) der Feldlinien
  - negative Ladung
    * Endpunkt (Senke) der Feldlinien

Feldvektoren des elektrostatischen Feldes

elektrische Feldstärke $\vec{E}$ Das Feld $\vec{E}$ wird gekennzeichnet durch die an der Probeladung angreifende Kraft.

- für $q > 0$ gleichsinnig zur Kraft $\vec{F}$
- für $q < 0$ gegensinnig zur Kraft $\vec{F}$

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\vec{F}(\vec{r},t)}{q} \qquad q \text{ — Probeladung}$$

$$[E] = \frac{1\,\text{N}}{\text{As}} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Ladung}} \qquad \text{Maßeinheit}$$

durch Influenz Ladungsverschiebung

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}(\vec{r},t)}{q}$$

elektrische Verschiebungsdichte Das Feld $\vec{D}$ wird gekennzeichnet durch die Größe der felderzeugenden Ladung.

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}(\vec{r},t) \qquad [D] = \frac{1\,\text{As}}{\text{m}^2} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche}}$$

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \qquad E = \frac{F}{Q}$$

$$D = \varepsilon_0 \cdot E$$

$$D = \frac{Q_1}{4\pi r^2}$$

3.3 Gaußscher Satz

elektrischer Fluß Φ, Maß für das gesamte elektrische Feld, das die Fläche ΔA durchsetzt.

$$\Phi = E \cdot A \qquad [\Phi] = \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}}$$

$$A_1 = A_2 \cdot \cos\theta$$

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{u} \cdot A = |E| \cdot |A| \cdot \cos\theta \qquad \vec{u} \text{ — Flächennormale der Fläche } A_2$$

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{E}\vec{u}\mathrm{d}A$$

$$\Phi = \int \mathrm{d}\Phi = \int \vec{E}\vec{u}\mathrm{d}A$$

$$\Phi = \int \vec{E}_n \mathrm{d}A$$

Gesamtfluß durch die geschlossene Kugeloberfläche Der Gesamtfluß Φ_{ges} der Feldlinien durch die Kugeloberfläche mit einer Ladung q im Inneren ist unabhängig vom Radius der Kugel und ist gleich:

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathrm{ges}} &= \oint_A E_n \mathrm{d}A \\ &= E_n \cdot 4\pi r^2 \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2\end{aligned}$$

$$\Phi_{\mathrm{ges}} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$\rightarrow$ erweiterbar für mehrere Ladungen

Gaußscher Satz Gaußsches Gesetz, mathematische Formulierung des elektrischen Feldes. Verknüpft den Fluß des Feldes durch die Oberfläche und die durch sie eingeschlossene Ladung miteinander.

Die Anzahl der Feldlinien durch eine geschlossene Oberfläche ist proportional der Größe der Ladungen innerhalb des umschlossenen Volumens.

Der Gesamtfluß durch eine beliebige Oberfläche beträgt $1/\varepsilon_0$ multipliziert mit der Gesamtladung innerhalb der Oberfläche:

$$\Phi_{\mathrm{ges}} = \oint_S E_n \mathrm{d}A = \frac{Q_{\mathrm{innen}}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_A \vec{D}\mathrm{d}A = Q_{\mathrm{innen}}$$

Die Quelle des D–Feldes ist die Ladung

(1. Maxwellsche Gleichung)

Ladungsdichte

$$\rho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V} \qquad \mathrm{d}q = \rho \cdot \mathrm{d}V$$

Gesamtladung

$$Q = \int_V \mathrm{d}q = \iiint \rho \, \mathrm{d}V$$

$$\oint \vec{E}_n \mathrm{d}A = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint \rho \, \mathrm{d}V$$

Anmerkung zum D–Feld

D–Feld $\vec{D}$, elektrische Flußdichte (Verschiebungsdichte) im Vakuum

$$D = \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \delta \qquad [D] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

$$\oint D \, \mathrm{d}A = \int \mathrm{d}Q = Q$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$$

3.4 Elektrisches Potential und Spannung

Elektrisches Potential φ_A eines Punktes A im elektrischen Feld, Spannung zwischen dem Punkt A und einem festen Bezugspunkt P.

Gibt die Arbeit W_A an, die die Kraft $\vec{F} = -Q\vec{E}$ verrichten muß, um die Ladung Q vom Punkt P zum Punkt A zu verschieben.

- Welche Arbeit ist nötig, um eine positive Probeladung q aus dem Unendlichen zum Punkt P zu bringen?

$$W = -\int \vec{F} \, \mathrm{d}\vec{r} \qquad F = q \cdot E$$

$$W = -\int_\infty^{P_1} q \cdot \vec{E} \, \mathrm{d}\vec{r}$$

$$W = -q \int_\infty^{P_1} \vec{E} \, \mathrm{d}\vec{r}$$

$$W_\infty^1 = -q \int_\infty^{P_1} \vec{E} \, \mathrm{d}\vec{r}$$

Potential

$$\varphi(r) = -\int \vec{E} \, \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\varphi = \frac{W}{q}$$

- Das Potential ist die Arbeit bezogen auf eine positive Einheitsladung, die notwendig ist, um die positive Einheitsladung aus dem Unendlichen zum Punkt P_1 zu bringen.
- Verschieben einer Ladung auf einer Äquipotentialfläche erfordert keine Arbeit

Ladung von Punkt P_1 nach P_2

$$W_1^2 = W_1^\infty - W_\infty^2$$

$$= -q \int_\infty^2 \vec{E} \, \mathrm{d}\vec{s} + \int_\infty^1 \vec{E} \, \mathrm{d}\vec{s}$$

$\rightarrow$ ich muß eine Arbeit leisten, die der Potentialdifferenz (2-1) entspricht

- auf einem geschlossenen Weg ist die Arbeit gleich Null

$$\oint \vec{E} \, \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

- Das Potential ist im Unendlichen gleich Null

Spannung $U = \varphi_2 - \varphi_1$ nennt man Spannung zwischen den Punkten P_1 und P_2 des elektrischen Feldes.

$$U = \varphi_2 - \varphi_1 = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} \qquad [U] = 1\ \mathrm{V} = 1\ \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{As}}$$

Die Spannung U ist gleich dem Quotienten aus der Arbeit, die zur Verschiebung der Probeladung q zwischen diesen Punkten nötig ist, und der Ladung q:

$$U = \frac{W}{q}$$

Äquipotentialflächen Flächen gleichen elektrischen Potentials.

- Können sich nicht schneiden oder berühren.
- Stehen immer senkrecht auf den Feldlinien:

$$\varphi = -\int \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r}$$
$$\mathrm{d}\varphi = 0 = \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r}$$
$$0 = |\vec{E}| \cdot |\mathrm{d}\vec{r}| \cdot \underbrace{\cos(\vec{E}, \mathrm{d}\vec{r})}_{90^\circ \rightarrow \mathrm{d}\vec{r} \perp \vec{E}}$$

- Leiteroberflächen sind stets Äquipotentialflächen
  - $\vec{E}$ steht senkrecht auf Äquipotentialflächen
    - $\rightarrow$ große Feldliniendichte an einer Spitze
      - · z. B. Blitzableiter, Spitzenentladung
- Vergleich mit dem Gravitationsgesetz:

$$F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \qquad F = g \cdot m$$
$$g = \gamma \cdot \frac{m_1}{r^2}$$

  $\rightarrow$ Höhenlinien sind Äquipotentiallinien im Kraftfeld der Erde

- neue Maßeinheit: 1 eV (Elektronenvolt)
  - Energie, die ein Elektron aufnimmt, wenn es durch eine Potentialdifferenz von 1 V beschleunigt wird
  - Maßeinheit für Energie

$$\Delta W = e \cdot \Delta U = 1.6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 1\ \mathrm{V} \qquad \mathrm{C} = \mathrm{As} \quad \mathrm{AsC} = \mathrm{Ws} = \mathrm{J}$$
$$= 1.6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

Potential einer Punktladung

$$\varphi(R) = -\int_{\infty}^{R} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = -\int_{\infty}^{R} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}\,\mathrm{d}r \qquad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$
$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{R} \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{R}$$

$$\varphi(R) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R}$$
$$E(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2}$$

3.5 Potential und Feld — vektoriell betrachtet

$\vec{E}$, $\vec{D}$	$\xleftarrow{\text{Gradient}}$	φ, Q
Vektoren	$\xrightarrow{\text{Divergent}}$	Skalare

Gradient Der Gradient einer Funktion $f(x,y,z)$ erzeugt Vektorkomponenten, die einen Vektor in Richtung der stärksten Änderung der Funktion in der Umgebung eines Punktes ergeben (stärkster Anstieg)

$$\text{grad } f = \nabla f = -\vec{E}$$

$$\varphi = -\int \vec{E} \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\mathrm{d}\varphi = -\vec{E} \mathrm{d}\vec{r} \qquad \vec{E} = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\vec{r}}$$

$$f(x,y,z)$$

$$\text{grad } f = \nabla f = \hat{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial f}{\partial z}$$

Divergenz

$$\text{div}\vec{f} = \nabla\vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (f_x, f_y, f_z)$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

3.6 Kapazität

3.6.1 Definition

Kapazität C des Kondensators ist ein Maß dafür, wieviel Ladung bei einer bestimmten Spannung gespeichert werden kann.

$$C = \frac{Q}{U} \qquad [C] = 1\,\text{F} = \frac{1\,\text{C}}{1\,\text{V}} = \frac{1\,\text{As}}{1\,\text{V}}$$

$$Q \propto U$$

$$Q = C \cdot U \qquad \text{“Kuh = Kuh”}$$

$$C = \frac{Q}{U} \qquad [C] = 1\,\text{F} = \frac{1\,\text{C}}{1\,\text{V}} = \frac{1\,\text{As}}{1\,\text{V}}$$

$$U = E \cdot s = \frac{\delta}{\varepsilon_0} \cdot s = \frac{Q \cdot s}{\varepsilon_0 \cdot A}$$

$$Q = C \cdot U$$

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{s} \qquad \varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{F}}{\text{m}}$$

$$C \propto A \qquad \text{Plattengröße}$$

$$C \propto \frac{1}{s} \qquad \text{Plattenabstand}$$

3.6.2 Schaltung

Parallelschaltung

→ Flächenvergrößerung

$$C_{\text{ges}} = \sum_i C_i$$

Reihenschaltung

→ Abstandsvergrößerung

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{\sum_i C_i}$$

3.6.3 Elektrische Polarisation von Dielektrika

Dielektrikum Nichtleiter, der in ein elektrisches Feld eingebracht wird.

- Erzeugung von Oberflächenladungen im Dielektrikum
- Polarisationsfeld $\vec{E}_p$ ist dem ursprünglichen Feld $\vec{E}_0$ entgegengesetzt
- ursprüngliches Feld $\vec{E}_0$ und Gegenfeld $\vec{E}_p$ überlagern sich zu Gesamtfeld $\vec{E}$ im Isolator

3.7 Energie im Kondensator

$$\begin{aligned}
E &= \frac{F}{Q} = \frac{U}{d} \\
F \cdot d &= U \cdot Q \\
Nm &= U \cdot Q \\
\mathrm{d}W &= U\mathrm{d}Q = \frac{Q}{C}\mathrm{d}Q \\
\int \mathrm{d}W &= \int \frac{Q}{C}\mathrm{d}Q \\
W &= \frac{1}{2}Q^2 \cdot \frac{1}{C} && Q = C \cdot U \\
W &= \frac{1}{2}C \cdot U^2
\end{aligned}$$

Kapitel 4

Elektrodynamik

4.1 Strom

elektrischer Strom kennzeichnet die Bewegung von elektrisch geladenen Teilchen in leitenden Medien.

Kann Erwärmung von Materie, elektrochemische Vorgänge und Magnetisierung bewirken.

Stromstärke I die durch eine Querschnittsfläche A pro Zeitintervall fließende Ladungsmenge ΔQ.

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \qquad [I] = \mathrm{A} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$$

Wirkung

- Feldlinien
- Magnetismus

4.2 Elektrischer Widerstand

Elektrischer Widerstand R eines Leiters, bestimmt die Stärke des Sromflusses durch den Leiter bei gegebener Spannung an den Leiterenden. Der Widerstand R ist das Verhältnis von Spannung U zu Stromstärke I:

$$R = \frac{U}{I}$$

Widerstand eines Drahtes R, proportional der Drahtlänge l und umgekehrt proportional dem Drahtquerschnitt A

Proportionalitätskonstante ist der spezifische Widerstand ρ:

$$R = \frac{l}{A} \cdot \rho$$

4.2.1 Ohmsches Gesetz

$$I = \frac{U}{R} \qquad U = R \cdot I$$

4.2.2 Schaltung von Widerständen

Reihenschaltung

$$U_i = R_i \cdot I$$
$$U = \sum_i U_i$$
$$U = R_{\text{ges}} \cdot I$$
$$R_{\text{ges}} = \sum_i R_i$$

Parallelschaltung

$$I_i = \frac{U}{R_i}$$
$$I = \sum_i I_i$$
$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{\sum_i R_i}$$

4.3 Gleichstromkreis

4.3.1 Bestandteile

- **Knoten**, Verbindung von mindestens drei Zuführungsleitungen
- **Zweig**, Zusammenschaltung von Bauelementen zwischen zwei Knoten
- **Masche**, geschlossene Kette von Zweigen

4.3.2 Kirchhoffsche Sätze

1. Satz (Knotenregel) Die Summe aller Ströme an einem Knoten ist null.
Abfließende Ströme werden positiv, zufließende negativ gezählt.
Ergibt sich aus der Erhaltung der Ladung

$$\sum_i I_i = 0$$

2. Satz (Maschenregel) Die Summe aller Spannungen in einer Masche ist null.
Spannungen in Umlaufrichtung werden positiv, gegen Umlaufrichtung negativ gezählt.
Ergibt sich als Folge der Energieerhaltung

$$\sum_i U_i = 0$$
$$\sum_i U_i = \sum_i E_i$$

E_i — eingeprägte Spannungen

4.3.3 Kennlinie einer Spannungsquelle

$$U_K = U_0 - R \cdot I$$
$$U_0 = R \cdot I$$

U_K — Klemmspannung

- 1. Fall: Kurzschlußstrom groß

  → R_i gering

- 2. Fall: R_i groß

  → Kurzschlußstrom gering

4.4 Elektrischer Strom und magnetisches Feld

- nichtmechanische Kraftwirkung
  - elektrostatisch
  - magnetisch
- magnetischer Südpol entspricht ca. dem geographischen Nordpol
  - Konvention seit dem Mittelalter: Nordpol einer Kompaßnadel zeigt zum geographischen Nordpol
- Permanentmagnet
  - große Zahl atomarer Dipole
- Erklärung des Magnetismus
  - André–Marie Ampère
  - Elektrische Ströme sind alleinige Quelle der magnetischen Kräfte.
  - Magnetismus von Permanentmagneten aufgrund molekularer Ringströme im Material
- magnetische Wechselwirkung
  - Kraft, die eine bewegte Ladung auf eine andere bewegte Ladung ausübt
  - wird durch **Magnetfeld** vermittelt
  - bewegte Ladung = elektrischer Strom

    $\rightarrow$ magnetische Wechselwirkung Wechselwirkung zwischen elektrischen Strömen
- Henry Faraday (ca. 1830)
  - Ein sich zeitlich änderndes elektrisches Feld erzeugt ein magnetisches Feld.

$$\oint \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{s} = -\int \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\vec{A} \qquad \text{Faradaysches Induktionsgesetz}$$

magnetostatisches Feld eines Dipols ist wie ein elektrisches Feld ein wirbelfreies Quellenfeld.

- 1 Magnetdipol

  $\rightarrow$ Kraftfeld $\vec{H}$
- Probedipol
  - magnetisches Moment m

$$m = P \cdot l \qquad P \text{ — Polstärke}$$
$$[m] = 1\ \mathrm{V \cdot s \cdot m} \qquad l \text{ — Abstand N– zu S–Pol}$$

magnetische Feldstärke

$$H = \frac{F}{P} \qquad F \text{ — Feldkraft}$$

4.4.1 Magnetfeld um einen Leiter

- Rechte–Hand–Regel
- quellenfreies Wirbelfeld

  $\rightarrow$ geschlossene Feldlinien

$$\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$$

$$\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = I$$

$$H = \frac{I}{2\pi r} \qquad [H] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

Magnetfeld einer Zylinderspule

$$H = N \cdot \frac{I}{l}$$ N — Zahl der Windungen

4.4.2 Kraftwirkungen

- Ein stromdurchflossener Leiter erfährt eine Kraftwirkung im Magnetfeld

Lorentz–Kraft Kraft eines Magnetfeldes auf eine bewegte Ladung.

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

Dreifingerregel der *rechten* Hand
$\vec{v}$ — Geschwindigkeit der Ladung q

Kraft eines Magnetfeldes auf einen stromdurchflossenen Leiterabschnitt

$$F = I\vec{l} \times \vec{B}$$

Kraft eines Magnetfeldes auf ein Stromelement

$$\mathrm{d}F = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$ $I\mathrm{d}\vec{l}$ — "Stromelement"

- $\vec{l}$
  - hat die Länge des Drahtstückes
  - zeigt in Richtung der Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger (Stromrichtung)

magnetische Feldlinien

- illustrieren das magnetische Feld $\vec{B}$
- Richtung der Feldlinien entspricht Richtung des Feldes
- Stärke des Feldes durch Dichte der Feldlinien gegeben

Unterschiede zwischen elektrischen und magnetischen Feldern

- Richtung der Kraftwirkung
  - elektrisches Feld
    * längs der Feldlinien
  - magnetisches Feld
    * senkrecht zum Feld und zur Bewegungsrichtung
    * Kraft wirkt nur auf bewegte Ladungen
- Feldlinien

- elektrische
  - beginnen immer auf positiven und enden immer auf negativen Ladungen
- magnetische
  - keine Anfangs– oder Endpunkte im Raum
    $\rightarrow$ keine magnetischen Monopole
  - bilden geschlossene Schleifen

4.5 Elektromagnetische Induktion

- In einer im Magnetfeld bewegten Leiterschleife (Spule) wird ein Spannungsstoß induziert bzw.
- ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld induziert in einer (festen) Spule einen Spannungsstoß (eine zeitlich sich ändernde Spannung)

4.5.1 magnetischer Fluß Φ

magnetischer Fluß Φ, Maß für die magnetische Flußdichte durch eine in ein Magnetfeld gelegte Fläche. Allgemein gegeben als Integral der Flußdichte über die Fläche:

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

magnetische Induktion (Flußdichte) Der Betrag B gibt die Stärke des Magnetfeldes an.

$$\vec{B} = \frac{\Phi}{A} \qquad \text{bzw.} \quad \vec{B} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}A}$$

$$[\vec{B}] = \frac{1\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} = \frac{1\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}^2} = 1 \text{ Tesla (T)}$$

$$\vec{B} \propto \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} \qquad \mu_0 \text{ — magnetische Feldkonstante im Vakuum}$$

$$\mu_0 = 1.257 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$$

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int B \cdot \mathrm{d}A \cdot \cos\alpha$$

$$\oint \vec{B}\mathrm{d}A = 0 \qquad \rightarrow \text{B–Feld ist quellenfrei!}$$

4.5.2 Induktivität eines Leiters

- Jeder stromdurchflossene Leiter ist von einem Magnetfeld umgeben

Induktivität L, Fähigkeit eines Leiters oder einer Spule, ein Magnetfeld bestimmter Stärke aufzubauen

$$\Phi \propto I$$

$$\Phi = L \cdot I$$

$$L = -\frac{U}{\dot{I}} \qquad [L] = 1\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A}} = 1\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}} = 1 \text{ Henry (H)}$$

4.5.3 zeitlich veränderliche elektrische und magnetische Felder

induzierte Spannung U_{ind} im geschlossenen Leiterkreis, der den sich zeitlich ändernden magnetischen Fluß umschließt, ist gleich der Änderungsgeschwindigkeit des magnetischen Flusses:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

Faradaysches Induktionsgesetz

$$U_{\text{ind}} = -N \cdot \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \qquad N \text{ — Windungszahl}$$

Lenzsche Regel Die induzierten Ströme sind immer so gerichtet, daß sie die Bewegung, durch welche sie erzeugt werden, zu hemmen versuchen
bzw.
daß die Magnetfelder der induzierten Ströme die zeitliche Änderung der induzierten Felder aufhalten wollen.

Selbstinduktion Die Änderung des Stromes I in einer Spule führt zu einer Änderung des magnetischen Flusses durch diese Spule und induziert damit in der Spule eine Spannung.
Die induzierte Spannung ist proportional der Stromänderung pro Zeiteinheit:

$$U_{\text{ind}} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

i — Stromänderung
L — Induktion (Materialeigenschaft)

- ändert sich I, ändert sich $\vec{H}$
- Lenzsche Regel
  - eine in der Spule selbstinduzierte Spannung, die die Änderung des Stromes aufhalten will
  - $\rightarrow$ die induzierte Spannung ist der angelegten Spannung entgegengerichtet
- Wechselströme

  $$i = I \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

  Übersetzungsverhältnis Transformator

  $$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$$
  $$U = U_0 \cdot \sin(\omega t)$$

Wirbelstrom Induktionsstrom in ausgedehnten Leitern mit zeitlich veränderlichem Magnetfeld. Die Stromlinien bilden in sich geschlossene Wirbel.

- Vorkommen/Anwendung
  - Trafobleche
  - Wirbelstrombremse

Skineffekt Stromverdrängung, tritt bei hochfrequenten Strömen ($f > 10^7$ Hz) auf: Der Strom fließt nur noch in einer dünnen Oberflächenschicht des Leiters.
Ursache: Zeitlich veränderliches Magnetfeld induziert im Leiterinneren eine der angelegten Spannung entgegengerichtete Spannung, die zum Rand hin abnimmt.

- wechselstromführender Leiter:

  $$i = I \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

- Skineffekt wächst mit steigender Frequenz

4.6 Maxwellsche Gleichungen

1. Das elektrische Feld ist ein Quellenfeld. Der elektrische Fluß durch eine geschlossene Oberfläche A ist gleich der Ladung im eingeschlossenen Volumen.

$$Q = \int_V \rho \mathrm{d}v = \varepsilon_0 \oint_A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \oint_A \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

2. Das magnetische Feld ist quellenfrei. Der gesamte magnetische Fluß durch eine geschlossene Fläche A ist Null.

$$\oint_A \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

3. Faradaysches Induktionsgesetz. Zeitlich sich ändernde Magnetfelder erzeugen ein elektrisches Feld.

$$\oint_s \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_A \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

4. Amperesches Gesetz mit Maxwellscher Ergänzung. Zeitlich sich ändernde elektrische Felder erzeugen ein Magnetfeld.

$$I + \int_A \frac{\mathrm{d}\vec{D}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_A \left(\vec{J} + \frac{\mathrm{d}\vec{D}}{\mathrm{d}t} \right) \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \oint_s \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{\blacksquare}$$

Teil II

2. Semester

Kapitel 5

Schwingungen und Wellen

Schwingung zeitlich periodische Zustandsänderung eines Systems (Oszillator).
Tritt auf, wenn

- ein System durch äußere Störung aus seinem Gleichgewicht gebracht wird (mechanisches, elektrisches, thermisches GG) und
- Kräfte wirksam werden, die das System wieder in Richtung des Gleichgewichtes bewegen.

Welle zeitlich und räumlich periodische Zustandsänderung eines Systems.
Tritt auf, wenn

- das System aus schwingungsfähigen Teilsystemen besteht,
- die Teilsysteme miteinander wechselwirken können (Energieübertragung) und
- mindestens ein Teilsystem durch äußere Störung aus seinem Gleichgewicht gebracht wird (mechanisches, elektrisches, thermisches GG).

5.1 Harmonische Schwingung

harmonische Schwingung periodischer Vorgang, dessen Vorgang sich durch eine Sinus– oder Cosinusfunktion beschreiben läßt.

Kraftgesetz der harmonischen Schwingung

$$F_{\text{Rück}} = -D \cdot x$$
$$m \cdot \ddot{x} = -D \cdot x$$

$$\frac{m}{D} \cdot \ddot{x} + x = 0 \qquad \text{homogene DGL 2. Ordnung}$$

Lösung:

$$x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \qquad f_0 = \frac{1}{T} \qquad \text{Eigenfrequenz}$$

Federschwinger

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

Fadenpendel

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Drehschwingungen

$$M = -D \cdot \alpha \qquad M = J \cdot \ddot{\alpha} \qquad \alpha \text{ — Auslenkwinkel}$$
$$0 = D \cdot \alpha + J \cdot \ddot{\alpha}$$
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{D}{J}}$$

5.1.1 gedämpfte Schwingungen

gedämpfte Schwingungen Auftreten von Reibungskräften: Der Oszillator verliert ständig Energie.

Bewegungsgleichung

$$0 = m\ddot{x} + \beta\dot{x} + Dx$$

β — Dämpfungskonstante
D — Richtgröße

allgemeine Lösung

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$
$$\delta = \frac{\beta}{2m}$$

δ — Abklingkoeffizient

Eigenfrequenz

$$\omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

ω_0^2 — Eigenfrequenz des ungedämpften Systems

5.1.2 erzwungene Schwingungen

erzwungene Schwingungen Anregung des Oszillators von einer äußeren periodischen Kraft.

$$\underbrace{F(t)}_{\text{Erregung}} = m\ddot{x} + \beta\dot{x} + Dx$$
$$F(t) = A \cdot \sin(\omega t)$$

ωt — Erregerfrequenz

freies System

$$\omega_0 \approx \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Eigenfrequenz

Phasenverschiebung zwischen Erregerfrequenz und Schwingungsfrequenz des Systems

$$\tan\varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Schwingungsamplitude

$$\frac{x_0}{A} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\underbrace{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}_{\text{Resonanznenner}} + (2\delta\omega)^2}}$$
$$\omega_0 = \omega$$

5.1.3 Resonanz

Resonanz heißt die maximale Amplitude des schwingungsfähigen Systems. Sie tritt für

$$f_0 = f_{\mathrm{err}}$$

auf.

5.1.4 Zusammenhang Schwingung — Welle

Welle Ausbreitung eines Schwingungszustandes im Raum.

5.2 harmonischer Oszillator

5.2.1 Definition, Beispiele

harmonischer Oszillator ein harmonische Schwingungen ausführendes System.

(quantenmechanischer) harmonischer Oszillator Teilchen der Masse m, das unter dem Einfluß einer der Auslenkung proportionalen rücktreibenden Kraft längs einer oder mehrerer Richtungen Schwingungen mit bestimmter Eigenkreisfrequenz ausführt. (Stöcker)

Beispiele

- Modell für viele Anregungen
  - Vibrationen in Molekülen und Atomkernen
  - Gitterschwingungen in einem kristallinen Festkörper
- Pendel
  - Federpendel
  - Fadenpendel
  - mathematisches/physikalisches Pendel
- elektrischer Schwingkreis

5.2.2 allgemeine Bewegungsgleichung

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

A — Amplitude
ω — Kreisfrequenz
φ — Phasenverschiebung

$$\omega = 2\pi f$$

f — Frequenz

5.3 Harmonische Wellen

5.3.1 Definition, Kenngrößen, Beispiele

harmonische Welle

Wellengleichung

$$u(t,x) = u_0 \cdot \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_0\right]$$
$$u(t,x) = u_0 \cdot \sin\left[2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

Phase Argument der Lösungsfunktion u; Größe, die den Schwingungszustand der Welle beschreibt.

Wellenfront Wellenfläche, Orte, an denen u zu vorgegebener Zeit dieselbe Phase hat.

Phasengeschwindigkeit c, Geschwindigkeit, mit der sich die Wellenfronten der Welle bewegen.

$$c = \lambda f = \frac{\omega}{k}$$

Wellenzahl

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Wellenlänge λ, Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Wellenfronten gleicher Phase. Beziehung zwischen Wellenzahl und Wellenlänge:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

5.3.2 Wellenarten

Longitudinalwellen Ausbreitungsrichtung parallel zur Schwingungsrichtung

Transversalwellen Ausbreitungsrichtung senkrecht zur Schwingungsrichtung

5.3.3 Welle als Kommunikationsmittel

5.3.4 Schallausbreitung / Hören

5.4 Elektromagnetische Wellen

elektromagnetische Wellen Ausbreitung elektrischer und magnetischer Felder im Raum; fortschreitende Lösungen der Maxwellschen Gleichungen; transportieren Energie.
Elektrischer und magnetischer Feldvektor stehen senkrecht aufeinander und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (Transversalwelle)

5.4.1 Erzeugung und Nachweis (Hertzscher Dipol)

Erzeugung durch Schwingkreise

Hertzscher Dipol Hertzscher Oszillator, linearer Oszillator, schwingende Ladungsverteilung, von elektromagnetischen Feldern umgeben; Ablösung der elektromagnetischen Felder durch Maxwell–Gleichungen beschrieben.
Feld schon im Abstand weniger Wellenlängen vom schwingenden Dipol Transversalwelle.

5.4.2 Eigenschaften elektromagnetischer Wellen

Maxwellsche Gleichungen

$$\oint_K \vec{H} \mathrm{d}\vec{r} = \frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\oint_K \vec{E} \mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

Ausbreitung elektromagnetischer Wellen

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

x — Ausbreitungsrichtung

$\vec{H}$ schwingt in z–Richtung

$\vec{E}$ schwingt in y–Richtung

$$\vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{k}$$

5.4.3 Lichtgeschwindigkeit

Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0, Naturkonstante, Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen im Vakuum; verknüpft die elektrische Feldkonstante ε_0 mit der magnetischen Feldkonstante μ_0:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

5.4.4 elektromagnetisches Spektrum

reicht von langwelligen Rundfunkwellen bis zur γ–Strahlung beim Atomzerfall und energiereicher kosmischer Strahlung

5.5 Wechselwirkung von elektromagnetischer Strahlung und Materie

5.5.1 Absorption (Schwächungsgesetz)

Absorption Aufnahme von Strahlung und Umwandlung in eine andere Energieform (Bsp.: Umwandlung der Schwingungsenergie der Elekronen in Wärme)

Absorptionsgrad α, dimensionslos, Anteil der aufgenommenen Strahlungsleistung Φ_a an der Gesamteinstrahlung Φ_0:

$$\alpha = \frac{\Phi_a}{\Phi_0}$$

Absorptionsgesetz der Strahlungsfluß nimmt im Inneren der Schicht exponeniell mit der Eindringtiefe x ab:

$$\Phi(x) = e^{-a(\lambda)x} \qquad a(\lambda) \text{ — Absorptionskoeffizient, Materialeigenschaft}$$

Herleitung

$$-\mathrm{d}I \propto I \cdot \mathrm{d}x$$
$$-\mathrm{d}I = \alpha \cdot I \cdot \mathrm{d}x$$
$$\frac{\mathrm{d}I}{I} = -\alpha \cdot \mathrm{d}x$$
$$\int_{I_0}^{I_T} \frac{\mathrm{d}I}{I} = \int_0^x -\alpha \mathrm{d}x \qquad I_T \text{ — Intensität des transmittierten Lichtes}$$
$$\ln \frac{I_T}{I_0} = -\alpha x$$
$$\frac{I_T}{I_0} = \Phi(x) = e^{-\alpha x}$$

5.5.2 Streuung

diffuse Streuung beim Auftreten von Licht auf eine rauhe Oberfläche, die aus vielen Flächenelementen mit verschiedenen Orientierungen besteht; Brechung und Reflexion in unterschiedliche Richtungen. Die Intensität I_S der Streustrahlung steigt proportional zur vierten Potenz der Frequenz; d. h. der Anteil der gestreuten Strahlung nimmt mit abnehmender Wellenlänge zu:

$$I_S \propto \frac{1}{\lambda^4}$$

5.5.3 Transmission

Transmission ungehindertes Hindurchtreten elektromagnetischer Wellen durch Materie

Transmissionsgrad τ, dimensionslos, Verhältnis des durchgelassenen Strahlungsflusses Φ_T zum einfallenden Strahlungsfluß Φ_0:

$$\tau = \frac{\Phi_T}{\Phi_0}$$

5.5.4 Reflexion an einem guten Leiter (stehende Wellen)

stehende Wellen Entstehung durch Überlagerung zweier Wellen mit gleicher Frequenz, gleicher Amplitude und gleichem Phasenwinkel, aber entgegengesetzter Laufrichtung.

$$u_1 = u_0 \cdot \left[\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)\right]$$
$$u_2 = u_0 \cdot \left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]$$

Addition

$$u = u_1 + u_2 = 2u_0 \cdot \cos\left(\frac{\omega}{c} \cdot x\right) \cdot \sin(\omega t)$$

5.5.5 Wechselwirkung elektromagnetischer Wellen mit einem Nichtleiter

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$ $\vec{P}$ — elektrische Polarisation
$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

- eine Lichtwelle erzeugt eine Polarisation im Medium
  - der E–Vektor des elektromagnetischen Feldes bringt die Elektronen der Atome zum schwingen
  - bewegte Ladung strahlt wieder Energie in Form von Lichtwellen ab

$$\vec{P} \propto \vec{E}$$
$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$$ χ — Suszeptibilität
$$\chi = \varepsilon_r - 1$$ ε_r — Permittivitätszahl

5.5.6 Definition der Brechzahl

Brechzahl Brechungsindex, n, Materialkonstante, charakterisiert das Brechungsverhalten des Mediums beim Übergang von Licht vom Vakuum in das Medium.

$$n_{\text{Medium}} = \frac{c_{\text{Vakuum}}}{c_{\text{Medium}}}$$

5.5.7 Dispersion

Dispersion Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit von der Wellenlänge (oder Frequenz)

- normale Dispersion
  - Die Brechzahl des Mediums wird mit wachsender Wellenlänge λ kleiner.
  - Der Brechungswinkel wird mir abnehmender Wellenlänge größer.

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} < 0$$

- anormale Dispersion
  - Die Brechzahl des Mediums wird mit wachsender Wellenlänge λ größer.
  - Der Brechungswinkel nimmt mit steigender Wellenlänge zu.

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} > 0$$

- keine Dispersion

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} = 0$$

Kapitel 6

Wellenoptik

Wellenoptik Erklärung der auf Beugung, Interferenz und Polarisation beruhenden optischen Erscheinungen auf Basis der Vorstellung, daß Licht eine transversale elektromagnetische Welle ist.

Beschreibung der Wechselwirkung von Licht mit Objekten mit Abmessungen im Bereich der Wellenlänge des Lichtes.

6.1 Licht als elektromagnetische Welle

- Definition elektromagnetischer Wellen und Eigenschaften vgl. 5.4, S. 50

6.2 Interferenz

Interferenz Überlagerung von Wellen gleicher Frequenz in einem bestimmten Raumpunkt.

Verstärkung

- "Wellen schwingen gleich"
- gleiche Phase
- Gangunterschied

$$\Delta L = z \cdot \lambda \qquad z \in \mathbb{Z}$$

Auslöschung

- "Wellen schwingen gegeneinander"
- entgegengesetzte Phase
- Gangunterschied

$$\Delta L = (2z+1)\frac{\lambda}{2} = (z+\frac{1}{2})\lambda$$

- z ist die Ordnungszahl
- im Medium ist der "optische Weg" zu betrachten

$$n \cdot d$$

n — Brechzahl
d — geometrischer Weg

$$c_o = \lambda_0 \cdot f \qquad c = \lambda \cdot f$$

$$n = \frac{c_0}{c} = \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

$$\rightarrow \frac{d}{\lambda} = \frac{n \cdot d}{\lambda_0}$$

- Bsp.: Gangunterschied bei einer Periode

$$\Delta L = \lambda \qquad \Delta\varphi = 2\pi \qquad \text{Phasendifferenz}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta L$$

- Bsp.: Wasser
  - Hyperbeln: Interferenzmaxima bei der Überlagerung von Elementar(Kugel)Wellen

6.2.1 Interferenz an dünnen Schichten (NEWTONsche Ringe)

$$\Delta L = n(\overline{BC}+\overline{CA}) - \overline{FA}$$

$$n = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$\Delta L = 2n\cdot\overline{BC} - \overline{FA}$$

$$\overline{BC} = \frac{d}{\cos\beta} = \frac{d}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} = \frac{n\cdot d}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}$$

$$\Delta L = \frac{2n^2\cdot d}{\sqrt{n^2\cdot\sin^2\alpha}} - \frac{2d\sin\alpha}{\sqrt{n^2\cdot\sin^2\alpha}}$$

$$\overline{FA} = \overline{BA}\cdot\sin\alpha$$

$$\overline{BA} = 2\overline{BE} = 2\overline{BC}\cdot\sin\beta$$

$$\overline{FA} = \frac{2d\cdot\sin^2\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}$$

$$\Delta L = 2d\cdot\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} = \frac{\lambda}{2}$$

Verstärkung

$$\Delta L = z\cdot\lambda$$

Auslöschung

$$\Delta L = (2z+1)\cdot\frac{\lambda}{2}$$

6.2.2 HUYGENS–FRESNELsches Prinzip

- HUYGENS

  Trifft eine Wellenfront auf ein Hindernis, so ist jeder Punkt der Wellenfront Ausgangspunkt einer elementaren Kugelwelle mit der gleichen Geschwindigkeit c und Frequenz f.

- FRESNEL

  Eine beliebige Wellenfront kann aus der Überlagerung von elementaren Kugelwellen erklärt werden.

6.3 Beugung

Beugung Abweichung von der geradlinigen Ausbreitungsrichtung des Lichtes.

- Vorkommen
  - Blenden
  - Kanten
  - “inverse Blende”
- Bedingung
  - “Hindernis”größe in der Größenordnung der Längenwelle
- BABINETsches Prinzip

  Eine Aussparung beliebiger Form in einer undurchsichtigen Wand erzeugt im parallelen Licht genau die gleiche Beugungsfigur wie ein Hindernis, daß dieselbe Form hat wie das Licht. (Gerthsen)

6.3.1 FRESNELsche / FRAUNHOFERsche Beugung

paralleles Licht Licht mit paralleler Ausbreitungsrichtung der einzelnen Wellen.

divergentes Licht Licht, das von einem Punkt ausgeht.

- FRAUNHOFERsche Beugung
  - durch paralleles Licht hervorgerufene Beugungserscheinung (Stöcker)
  - Beugungsbilder entstehen stets in großem Abstand vom Hindernis bzw. von der beugenden Öffnung
  - richtungsabhänig
- FRESNELsche Beugung
  - durch divergentes Licht hervorgerufene Beugungserscheinung (Stöcker)
  - Beugungsmuster in geringem Abstand vom Hindernis bzw. von der Öffnung beobachtet
  - abstandsabhängig

6.3.2 Beugung am Spalt

Einzelspalt (FRAUNHOFER)

$$\Delta c = d \cdot \sin\alpha \qquad \begin{array}{rl} \text{Maximum} & \Delta c = z \cdot \lambda \quad z = \pm 1, \pm 2, \ldots \\ \text{Minimum} & \Delta c = (z + \frac{1}{2})\lambda \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} z = 0 & d \sin\alpha = 0 & \rightarrow \alpha = 0° \\ z = 1 & d \sin\alpha = \lambda & \end{array}$$

(i) $d \ll \lambda$

$$\sin\alpha = \frac{z \cdot \lambda}{d} < 1$$
$$\sin\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \alpha = 90°$$

(ii) $d \cong \lambda$

$$\sin\alpha = \frac{z \cdot \lambda}{d} \qquad \alpha < 90°$$

(iii) $d \gg \lambda$

$$\sin\alpha = 0 \qquad \alpha = 0°$$

6.3.3 Beugung am Strichgitter

$$g \cdot \sin\alpha = z \cdot \lambda \qquad z = 0, \pm 1, \pm 2$$

Maxima: $\sin\alpha_n = \pm n \cdot \frac{\lambda}{g}$ $\qquad$ g — Gitterkonstante

6.4 Kohärenz und Inkohärenz

6.4.1 Begriffserklärung

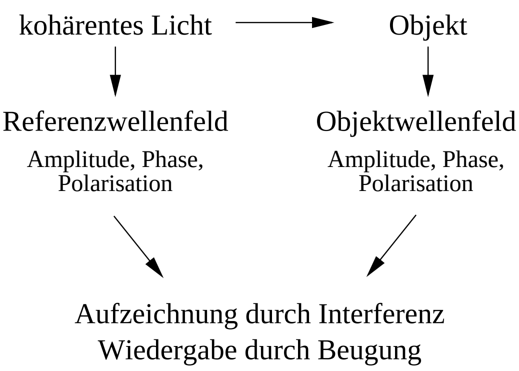
kohärente Wellen Zwei Wellen sind kohärent, wenn ihre Phasendifferenz nicht von der Zeit abhängt.

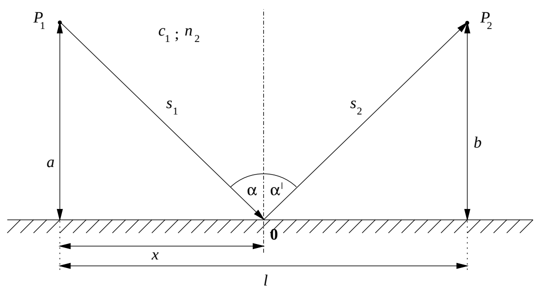
inkohärente Wellen Zwei Wellen ohne festen Phasenbezug sind inkohärent.
Rechtwinklig zueinander polarisierte Strahlen der gleichen Strahlenquelle sind inkohärent.

6.4.2 Prinzip der Holographie

Hologramm optisches Element, in dem nicht nur eine Intensitätsverteilung (wie bei der Photographie), sondern auch die relative Phasenverschiebung gespeichert ist (Stöcker).

- D. GABOR (1948)
  - Speicherung von Amplitude und Phase eines Wellenfeldes in einer Photoplatte
  - Prinzip: Abbildung in zwei Schritten
    1. Speicherung des Beugungsbildes eines Gegenstandes durch Interferenz
    2. Rekonstruktion durch Beugung





6.5 Reflexion und Brechung

6.5.1 Herleitung des Reflexions– und Brechungsgesetzes

Reflexionsgesetz Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel

$$\alpha_1 = \alpha_1'$$

Brechungsgesetz (Snellius 1621)

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{c_1}{c_2} = \text{const.} = \frac{n_2}{n_1}$$

Reflexionsvermögen R

$$R = \frac{I_0}{I_R}$$

$$R = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$$

Beispiel: Glas ($n = 1.5$)

$$R_{\text{Glas}} = \frac{(1.5-1)^2}{(1.5+1)^2} = 0.04$$

$\rightarrow$ 4% Reflexionsvermögen

6.5.2 Totalreflexion

Totalreflexion Wenn der Grenzwinkel der Totalreflexion überschritten wird, wird das Licht nicht mehr gebrochen, sondern total reflektiert.
Beim Übergang von optisch dichterem in optisch dünneres Medium.

$$\sin\alpha_T = \frac{n_2}{n_1}$$

bzw.

$$\sin\alpha_T = \frac{1}{n} \qquad \text{für Luft}$$

6.6 Polarisation von Licht

6.6.1 Erzeugung durch Reflexion und Brechung

- Reflexionsgesetz: $\alpha_1 = \alpha_p$
- Bedingung: $\alpha_1 + \alpha_p = 90°$
- SNELLIUS

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_p} = \frac{n_2}{n_1}$$

- BREWSTERsches Gesetz

$$\tan\alpha_p = \frac{n_2}{n_1}$$

- BREWSTER–Winkel α_p
  - nur eine Polarisationsebene ist im reflektierten Licht enthalten
    → linear polarisiertes Licht
  - entspricht dem Fall, wenn $\alpha_1 + \alpha_p = 90°$
  - Bsp.: Glas

$$n = 1.5 \qquad \alpha_p = 57°$$

6.6.2 Polarisationsfilter

anisotropes Medium Die verschiedenen Richtungen eines Stoffes absorbieren verschieden stark (**Dichroismus**).
→ Die Moleküle sind in geordneten Strukturen eingelagert.

6.6.3 Erzeugung durch Doppelbrechung

- Kristalle, die durch eine Wachstumsrichtung ausgezeichnet sind

  → unterschiedliche optische Eigenschaften in verschiedenen Richtungen (n_1, n_2)
  1. Licht eingestrahlt in Richtung der optischen Achse “fühlt” einen isotropen Körper
  2. In einem anisotropen Stoff bei Lichteinstrahlung senkrecht zur optischen Achse breiten sich zwei Wellen mit unterschiedlicher Geschwindigkeit aus. Diese beiden Wellen (ordentliche und außerordentliche) sind senkrecht zueinander polarisiert.

6.6.4 Interferenz polarisierten Lichtes (linear / zirkular polarisiertes Licht)

-

6.6.5 Wirkprinzip eines Polarimeters und optische Aktivität

-

Kapitel 7

Geometrische Optik

7.1 Grundlagen

7.1.1 Anwendbarkeit

- Voraussetzung: Abmessungen groß gegenüber der Wellenlänge

7.1.2 Vereinfachungen

- nur noch Berücksichtigung der Ausbreitungsrichtung "Lichtstrahl"

7.1.3 FERMATsches Prinzip (Axiom)

- Der Lichtweg zwischen zwei Punkten folgt immer dem Weg, für den er die kürzeste Zeit benötigt.
- Lichtweg

$$L = n \cdot l = \int_A^B n(S)\,\mathrm{d}s \qquad \text{im homogenen Medium}$$

l — geometrische Weglänge

$$= \frac{c}{c_0}$$

1. in homogenen Stoffen geradlinig
2. umkehrbar
3. Reflexions– und Brechungsgesetz

Medium	Lichtweg
homogen	gerade
inhomogen	gekrümmt
Grenzflächen	Reflexion, Brechung

7.1.4 Eigenschaften der Lichtstrahlen (Stöcker)

1. Licht kann durch einzelne Strahlen beschrieben werden. Ein Strahl beschreibt im homogenen Medium eine gerade Linie. Im inhomogenen Medium können Lichtstrahlen gekrümmt sein.
2. Strahlen verlaufen senkrecht zur Wellenfront der entsprechenden Welle
3. Strahlen können sich schneiden und beeinflussen sich nicht gegenseitig
4. die Richtung der Strahlen ist umkehrbar
5. An der Grenzfläche zwischen zwei Medien, in denen sich Licht unterschiedlich schnell ausbreitet, ändert sich die Richtung eines Lichtstrahls

7.1.5 Arten von Strahlen (Stöcker)

- Strahlenbündel
  - räumliche Gesamtheit von Lichtstrahlen
- Strahlenbüschel
  - ebene Gesamtheit von Strahlen
  - Teilmenge eines Bündels, die z. B. durch Ausblenden durch einen Spalt entsteht.
- Divergente Strahlen
  - Strahlen, die von einem Punkt ausgehen
- Konvergente Strahlen
  - Strahlen, die in einem Punkt zusammenlaufen
- Parallele Strahlen
  - alle Strahlen verlaufen parallel zueinander
- Homozentrische Strahlen
  - Oberbegriff für divergente, konvergente und parallele Strahlen
- Diffuse Strahlen
  - einzelne Strahlen verlaufen wahllos zueinander
  - Gegensatz zu homozentrischen Strahlen
  - Entstehung:
    - z. B. bei der Reflexion paralleler Strahlung an einer rauhen Oberfläche

7.2 Reflexion und Brechung

7.2.1 Reflexion

- diffus
  - an rauhen / unregelmäßigen Oberflächen
- regulär

  → Reflexionsgesetz
- Reflexionsgesetz
  1. einfallender und reflektierter Strahl und Einfallot befinden sich in einer Ebene
  2. Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel

     $$\alpha = \alpha'$$

7.2.2 Brechung

Brechung Änderung der Richtung eines Strahls beim Durchgang durch die Grenzfläche zwischen zwei Medien

- Brechungsindex n
  - Materialkonstante
  - charakterisiert das Brechungsverhalten des Mediums beim Übergang von Licht vom Vakuum in dieses Medium

    $$n_{\text{Medium}} = \frac{c_{\text{Vakuum}}}{c_{\text{Medium}}}$$

Brechungsgesetz

1. Einfallstrahl, gebrochener Strahl und Lot befinden sich in einer Ebene
2. Verknüpfung von Einfalls– und Ausfallswinkel

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta = c$$

7.2.3 Totalreflexion

- tritt auf, wenn der Brechungswinkel $\geq$ 90° beträgt
- Grenzwinkel α_T der Totalreflexion

$$\sin\alpha_T = \frac{n_2}{n_1}\sin 90^\circ = \frac{n_2}{n_1}$$

7.3 Optische Abbildungen

7.3.1 reelle / virtuelle Bilder

reelle Abbildung Zu Bildpunkten gehörige Strahlenbündel sind konvergent.

virtuelle Abbildung Zu Bildpunkten gehörige Strahlenbündel sind divergent.
Nicht die Strahlen selbst schneiden sich wieder, sondern ihre rückwärtigen Verlängerungen.
paragraphvirtueller Bildpunkt (B') Schnittpunkt der verlängerten Strahlen bei einer virtuellen Abbildung

7.3.2 Abbildung am Spiegel

- Abildungsgleichung (sphärischer Spiegel)

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$$

f — Bildbrennweite
b — Bildweite
g — Gegenstandsweite

7.3.3 Abbildung durch Linsen

- Abbildungsgleichung (dünne Linsen)

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$$

f — Bildbrennweite
b — Bildweite
g — Gegenstandsweite

7.4 Optische Geräte

7.4.1 Das Auge

7.4.2 Lupe

7.4.3 Mikroskop

7.5 Auflösungsvermögen optischer Instrumente

- begrenzt durch die Wellennatur des Lichtes
- Mikroskop

$$p \gtrapprox \frac{\lambda}{n \cdot \sin\alpha}$$ bis auf ca. $p \gtrapprox \frac{\lambda}{2}$ möglich

Kapitel 8

Quantenoptik und Wellennatur der Materie

8.1 Formulierung des Prinzips der Wellennatur der Materie

Jedes Teilchen besitzt Welleneigenschaften und umgekehrt jede Welle Teilcheneigenschaften

8.2 Photoelektrischer Effekt

- Erwartung
  1. Erhöhung der Lichtintensität führt zu Erhöhung der kinetischen Energie der Photoelektronen

     $$I \propto E_0^2$$

  2. Schwellenwert $I_{\text{min.}}$
- Ergebnis
  1. Erhöhung der Anzahl (nicht der Energie) der Photoelektronen
  2. Grenzwert durch Frequenz bestimmt
- Erklärung durch EINSTEIN (1905)
  - **Photonen** (Lichtquanten)

    $$E = h \cdot f$$

  - maximale kinetische Energie (W_{max}) der emittierten Elektronen als Funktion der Lichtfrequenz

    $$W_{\text{max}} = h \cdot f - W_0 \qquad \begin{array}{l} h = 6.63 \cdot 10^{-34}\,\text{J} \cdot \text{s} \\ W_0 \text{ — Austrittsarbeit} \end{array}$$

8.2.1 Innerer Photoelektrischer Effekt

Innerer Photoelektrischer Effekt Freisetzung von Elektronen immerhalb des Materials. Bei einem Halbleiter führt dies zu einer Änderung der elektrischen Leitfähigkeit.

8.2.2 Äußerer Photoelektrischer Effekt

Äußerer Photoelektrischer Effekt Emission von Elektronen aus der bestrahlten Oberfläche in den Außenraum.

8.2.3 PLANCKsches Wirkungsquantum

8.2.4 Ablösearbeit und kinetische Energie der Elektronen

Austrittsarbeit Ablösearbeit, W_A, Energie, die mindestens notwendig ist, um ein Elektron aus einem Material herauszuschlagen.

Kinetische Energie der Photoelektronen Unabhängig von der Intensität, abhängig von der Frequenz der einfallenden Strahlung. Strahlungsintensität bestimmt nur Stärke des Photostroms.

$$E_{\text{kin}} = hf - W_A$$

8.3 COMPTON–Effekt

- Versuch: COMPTON (1921)
  - Streuung von Röntgenstrahlen an freien Elektronen
  - Ergebnis:
    - Photon besitzt nach Stoß mit dem Elektron eine geringere Energie und damit niedrigere Frequenz als vor dem Stoß
  - wächst mit dem Streuwinkel
  - unabhängig von der Wellenlänge der einfallenden Strahlung
- Licht der Energie E besitzt einen Impuls p

  $$p = \frac{E}{c}$$

- Energie eines Lichtquants

  $$E = h \cdot f$$

$$p = h \cdot \frac{f}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

8.3.1 Erklärung

- Hinweis auf den Teilchencharakter von Licht
  → Wechselwirkung je eines Photons mit einem Elektron
  - durch Rückstoß des Elektrons Verringerung der Energie des Photons
    → größere Wellenlänge
    - Wellenlängendifferenz: COMPTON–**Wellenlänge**
  - Energie– und Impulserhaltung gelten

8.3.2 Herleitung der COMPTON–Wellenlänge

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$
$$\lambda_C = \frac{h}{mc} = \frac{hc}{mc^2} = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{5.11 \cdot 10^5\ \text{eV}} = 2.43 \cdot 10^{-12}\ \text{m} = 2.43\ \text{pm}$$

8.4 Welle–Teilchen–Dualismus

8.4.1 DE BROGLIE–Wellenlänge

- DE BROGLIE (1924): Elektronen besitzen Welleneigenschaften
- Frequenz

$$f = \frac{E}{h}$$

- Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

- für alle Teilchen gültig
  - für makroskopische Objekte zu klein, um Welleneigenschaften (Interferenz, Beugung) beobachten zu können

8.4.2 Elektronenbeugung

- DAVISSON / GERMER (1926)
  - Beobachtung von Elektronenbeugung an einer Kristalloberfläche
  - Gangunterschied

$$\Delta D = d \cdot \sin\alpha$$
$$\Delta D = \lambda$$
$$h = p \cdot d \sin\alpha$$

8.5 Das große Paradoxon

8.5.1 Formulierung

- Elektronenverteilung beim Doppelspaltexperiment
  - Gesamtheit der Elektronen bildet Beugungsmuster (vergleichbar mit Lichtwellen)
- geringe Intensität (nur je ein Elektron im Spalt)
  - einzelne Lichtpunkte beim Auftreffen der Elektronen auf den Leuchtschirm
    $\rightarrow$ Teilchencharakter
  - Auftreffpunkte bilden in ihrer Summe ein Beugungsbild
    $\rightarrow$ Wellencharakter
- gilt genauso für Photonen

8.5.2 Lösung: Die Wellenfunktion

- Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen bei einem beliebigen Wert von x, y, z, t anzutreffen, ist proportional zur

  Intensität $|\psi(x,y,z,t)|^2$

- Superposition
  - Überlagerung mehrerer Wellenfunktionen

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

Kapitel 9

Quantenphysik

9.1 Das BOHRsche Atommodell

- 1913 von NIELS BOHR veröffentlicht
  - Mischung aus klassischen und quantenmechanischen Vorstellungen
  - kann als “Bindeglied” zwischen beiden betrachtet werden
- Ziel
  - Erklärung des Linienspektrums eines leuchtenden atomaren Gases

9.1.1 BOHRsche Postulate

Diskussion des H–Atoms

$$F_e = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \text{für H: } Z = 1$$

$$F_a = ma = \frac{mv^2}{r} = F_e$$

$$mv^2 r = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

Erstes BOHRsches Postulat In einem Atom bewegt sich ein Elektron nach den Gesetzen der klassischen Mechanik auf diskreten Kreisbahnen mit den Energien E_n. (Tipler) Die erlaubten Elektronenbahnen sind solche, bei denen der Bahndrehimpuls des Elektrons mvr ein ganzzahliges Vielfaches der Grundeinheit $\hbar$ des Bahndrehimpulses ist. (Riedel)

$$|l| = mvr = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar \qquad n \text{ — Hauptquantenzahl}$$

Zweites BOHRsches Postulat Die Bewegung des Elektrons erfolgt strahlungslos. Beim Übergang des Elektrons von einem stationären Zustand mit Energie W_m in einen stationären Zustand niedrigerer Energie W_n wird ein Photon der Frequenz f emittiert. (Tipler)

$$hf = W_m - W_n$$

Drittes BOHRsches Postulat Der Drehimpuls eines Elektrons in einem stationären Zustand nimmt nur die diskreten Werte mvr an, wobei n eine natürliche Zahl ist. (Tipler)

$$m_e v_n^2 r_n = Ze^2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \qquad m_e v_n r_n = n \cdot \hbar$$

Größe von r_n

$$r_n = \frac{Ze^2}{m_e v_n^2} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \qquad v_n = \frac{n\hbar}{m_e r_n}$$

$$r_n = \frac{Ze^2 m_e^2 r_n^2}{m_e^2 n^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_e Z e^2} \cdot n^2$$

$$r_n = \frac{a_H}{z} \cdot n^2 \qquad a_H \text{ — BOHRscher Atomradius}$$

$$v_n = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar} \cdot \frac{1}{n}$$

Wasserstoff: ($Z = 1$)

n=1

$$r_1(\mathrm{H}) \equiv a_H = 0.53 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$$

$$v_1(\mathrm{H}) = 2.2 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$E_G = -\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{me^4 z^2}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$n \;\rightarrow\; n'$:

$$hf = E_n - E_{n'} \qquad n > n'!$$

$$f_{nn'} = \frac{E_n - E_{n'}}{h}$$

$$f_{nn'} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{2\pi^2 e^4 m}{h^3} \cdot \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$f_{nn'} = R_H \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

im Tipler falsch!

R_H — RYDBERG–Frequenz

$$R_H \equiv \frac{e^4 m_e}{h^3 \cdot 8\varepsilon_0^2}$$

für Wasserstoff: $R_H = 3.288 \cdot 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$

Beispiel: Ionisierungsenergie von H

$$q = R_H = 109678\,\mathrm{cm}^{-1} \triangleq 13.59\,\mathrm{eV}$$

$$\lambda = \frac{c}{R_H} = 91.1\,\mathrm{nm}$$

9.1.2 Mängel / Anwendbarkeit

- Problem
  - Wie zu erklären, daß die Energie der Atome auf diese spezielle Weise beschränkt ist?
  - Wie kann deren Betrag berechnet werden?
- Mängel
  - gute Resultate nur für Probleme, die auf Ein–Elektronen–Betrachtungen reduziert werden können

9.2 Die Heisenbergsche Unschärferelation

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar$$

9.3 Wellenmechanisches Atommodell

$\psi(x,y,z,t)$ $\qquad$ $|\psi|^2 \rightarrow$ Wahrscheinlichkeit

$\psi(x,t) = A \cdot \cos(kx - \omega t)$ $\qquad$ k — Wellenzahl

$|\psi|^2 \propto \cos^2(kx - \omega t)$

$\rightarrow$ Wahrscheinlichkeit kann den Wert Null annehmen

Ausweg: Komplexe Wellenfunktion

Komplexe Wellenfunktion

$$\psi(x,t) = A \cdot e^{i(kx-\omega t)}$$
$$|\psi|^2 = \psi^* \cdot \psi = [A \cdot e^{i(kx-\omega t)}] \cdot [A \cdot e^{-i(kx-\omega t)}] = A^2$$

$$e^{i\varphi} = \underset{\Re}{\cos\varphi} + i \underset{\Im}{\sin\varphi}$$

$$\begin{cases} \Re(\psi) = A \cdot \cos(kx - \omega t) \\ \Im(\psi) = A \cdot \sin(kx - \omega t) \end{cases}$$

Bsp.: Elektron im Kastenpotential

$$\psi(x,t) = B \cdot e^{ikx - i\omega t} - B \cdot e^{-ikx - i\omega t}$$
$$\psi(x,t) = B \cdot \left(e^{-ikx} - e^{-ikx}\right) \cdot e^{-i\omega t}$$
$$\sin(kx) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$
$$\psi(x,t) = 2iB \cdot \sin(kx) - e^{-i\omega t}$$
$$2iB = A$$

Ortsabhängigkeit der Funktion

$\psi(x) = A \cdot \sin(kx)$ $\qquad$ $\psi(L) = 0$

$$\sin(kL) = 0$$
$$kL = n\pi$$
$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$
$$\psi(x) = A \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right)$$

zugehörige Impulse

$p_n = \hbar \cdot k_n$ $\qquad$ $(k_n = \frac{n\pi}{L})$

$$p_n = n\pi \cdot \frac{\hbar}{L}$$

Werte der kinetischen Energie

$$E_n = \frac{p_n^2}{2\pi} = n^2 \frac{[r^2 \cdot \hbar^2]}{2\pi L^2}$$

Beispiel: Berechnung der Wellenlänge λ

$hf = E_2 - E_1$ $\qquad$ $E_1 = 37.3\,\text{eV}$

$hf = 4E_1 - E_1 = 3E$

$f = \frac{3E_1}{h}$ $\qquad$ $\lambda = \frac{c}{f} \approx 11.1\,\text{nm} = 11.1 \cdot 10^{-9}\,\text{m}$

$h \approx 6.626 \cdot 10^{-34}\,\text{J} \cdot \text{s} = 4.136 \cdot 10^{-15}\,\text{eV} \cdot \text{s}$

9.3.1 Bedeutung der Quantenzahlen

9.3.2 Wesen eines Atoms

9.4 Spontane und stimulierte Emission von Photonen

9.5 Laser

- LASER = *L*ight *A*mplification *S*timulated *E*mission *R*adiation

9.5.1 Physikalisches Prinzip

- Laser–Bedingungen
  1. Besetzungsinversion
  2. induzierte Emission
  3. Resonator

9.5.2 Eigenschaften von Laserstrahlen

1. hohe spektrale Energiedichte
2. Monochromasie mit teilweiser Abstimmbarkeit
3. große zeitliche und räumliche Kohärenz (Sinuswellen)
4. vollständige Amplitudenstabilität
5. (fast) keine Divergenz
6. Möglichkeit der Erzeugung kürzester Impulse ($\approx 10^{-14}$ s)

9.5.3 Anwendungen in der biologischen/medizinischen Forschung

Teil III

Prüfungsfragen

1. Kinematik der Punktmasse (PM): Bewegungsarten
    - freier Fall
    - Kreisbewegung einer PM
    - Vergleich Translation — Rotation der PM
2. Dynamik der PM: NEWTONsche Axiome
    - schwere Masse / träge Masse
    - **Kraftbegriff in der Newtonschen Mechanik**
    - **bewegte Bezugssysteme**
    - (scheinbares Gewicht — effektives Gewicht)
3. Arbeit und Energie: Begriff der Arbeit
    - Beschleunigungsarbeit und Hubarbeit
    - Formen der mechanischen Energie
    - Zusammenhang Arbeit — Energie
    - **Arbeit konservativer Kräfte**
    - Energieerhaltungssatz der Mechanik
4. Dynamik von PM–Systemen
    - Impuls und Impulserhaltung
    - Kraftstoß und Kraftwirkung
    - Stoßgesetze
5. Starrer Körper
    - Massenmittelpunkt (Schwerpunkt)
    - Gleichgewichtsbedingungen und –arten
    - (Drehmoment / Kräftepaar)
    - Massenträgheitsmoment
    - **Satz von Steiner**
    - kinetische Energie, Arbeit und Leistung
    - Beegungsgleichung
    - Drehimpuls und –erhaltungssatz
6. Schwingungen
    - Harmonische Kräfte / Harmonische Schwingungen
    - Beispiele (Feder, mathematisches / physikalisches Pendel)
    - Kenngrößen einer harmonischen Schwingung
    - Energiebilanz bei der harmonischen Schwingung
    - Beispiele für harmonische Schwingungen
7. Zusammenfassung
    - Erhaltungssätze in der Mechanik
    - **Herleitung der ersten kosmischen Geschwindigkeit (Impulserhaltung)**
    - **Begriff der Arbeit**
    - Vergleich der Mechanik der PM und des starren Körpers (Analogiebeziehungen)

Prüfungsfragen zur Thermodynamik 1998/1999

1. Grundlagen
   - hydrostatischer Druck
   - Archimedisches Prinzip (Auftrieb)
2. Ideales Gas
   - Zustandsgrößen
   - Zustandsgleichung
3. Kinetische Theorie der Wärme
   - Temperaturbegriff
   - Wärmeenergie (und nullter HS)
4. Hauptsätze der Thermodynamik
5. **Carnotscher Kreisprozeß**
   - **Reversible und irreversible Prozesse**
6. Entropie
   - Entropie und Wahrscheinlichkeit
   - **Entropie und biologische Evolution**

Prüfungsfragen zur Elektrostatik 1998/1999

1. Grundlagen
   - Satz von der Erhaltung der Ladung
   - Satz von der Quantelung der Ladung
   - elektrische Feldstärke / Feldlinien
2. E in Leitern / Isolatoren:
   - Spitzenwirkung (Blitzableiter)
   - FARADAYscher Käfig
   - COULOMBsches Gesetz
3. **Gaußscher Satz**
4. Elektrisches Potential und Spannung
   - Definition
   - **Beweis: elektrostatisches Feld ist wirbelfreies Quellenfeld**
   - **Beweis: Äquipotentialflächen stehen senkrecht zu Feldlinien**
   - Potential einer Punktladung
5. Kapazität
   - Definition
   - Schaltung von Kapazitäten
   - elektrische Polarisation von Dielektrika (Vergleich mit Erscheinungen der Influenz)
6. Materialgleichung
   - Formulierung und Inhalt
   - Konsequenzen

Prüfungsfragen zur Elektrodynamik 1998/1999

1. Elektrischer Strom
   - Definition
   - Wirkungen
2. Elektrischer Widerstand
   - Definition / OHMsches Gesetz
   - Temperaturabhängigkeit (Supraleitung)
3. Gleichstromkreis
   - Schaltung von Widerständen
   - KIRCHHOFFsche Gesetze
   - Meßbereichserweiterung (A–/V–Meter)
4. Elektrischer Strom und magnetisches Feld
   - Magnetfeld eines Leitungsstromes
   - Wirkung zweier Ströme aufeinander
   - **Lorenzkraft**
5. Elektromagnetische Induktion
   - Induktionsgesetz
   - LENZsche Regel

Prüfungsfragen zum Kapitel Schwingungen und Wellen 1998/1999

1. Harmonische Schwingung
   - Definition, Kenngrößen, Beispiele
   - freie ungedämpfte / gedämpfte harmonische Schwingung
   - erzwungene Schwingung
   - Resonanz
   - Zusammenhang Schwingung / Welle
2. **Harmonischer Oszillator**
   - **Definition, Beispiele**
   - **allgemeine Bewegungsgleichung**
3. Harmonische Wellen
   - Definition, Kenngrößen, Beispiele
   - Wellenarten
   - Wellen als Kommunikationsmittel
   - Schallausbreitung / Hören
4. Elektromagnetische Wellen
   - Erzeugung und Nachweis (HERTZscher Dipol)
   - Eigenschaften
   - Begriff der Lichtgeschwindigkeit
   - elektromagnetisches Spektrum
5. Wechselwirkung elektromagnetischer Wellen mit Materie
   - Adsorption (Schwächungsgesetz)
   - Streuung
   - Transmission
   - Reflexion **an einem guten Leiter (stehende Wellen)**
   - **Wechselwirkung mit einem Nichtleiter (Brechzahl)**
   - Definition der Brechzahl
   - **Dispersion**

Prüfungsfragen zur Optik 1998/1999 — Wellenoptik

1. Licht als elektromagnetische Welle
   - Definition, Eigenschaften
2. Interferenz
   - Interferenz an dünnen Schichten (**Newtonsche Ringe**)
   - HUYGENS–FRESNELsches Prinzip
3. Beugung
   - **Fresnelsche / Frauenhofersche Beugung**
   - Beugung am Spalt
   - **Beugung am Strichgitter**
4. Kohärenz und Inkohärenz
   - Begriffserklärung
   - **(Prinzip der Holographie)**
5. Reflexion / Brechung
   - Herleitung des Reflexions– und Brechungsgesetzes
   - Begriff der Totalreflexion, Beispiele
6. Polarisation
   - Erzeugung durch Reflexion und Brechung
   - Erzeugung durch Doppelbrechung
   - **Interferenz polarisierten Lichtes (linear/zirkular polarisiertes Licht)**
   - Wirkprinzip eines Polarimeters und optische Aktivität

Geometrische Optik

1. Grundlagen
   - Anwendbarkeit, Vereinfachungen, FERMATsches Prinzip
2. Optische Abbildung
   - reelle Bilder; virtuelle Bilder
   - am Spiegel (einschließlich Begriffserklärung)
   - durch Linsen
3. Das Auge
   - als Linsensystem / Sehfehler / Wirkprinzip
   - Farbsehen (Mensch / Biene) / Drei–Farben–Theorie
4. Auflösungsvermögen
   - optischer Geräte / menschliches Auge

Prüfungsfragen zum Kapitel Wellennatur der Materie 1998/1999

1. Formulierung des Prinzips der Wellennatur der Materie
2. photoelektrischer Effekt
   - Erklärung
   - PLANCKsches Wirkungsquantum
   - Ablösearbeit und kinetische Energie der Elektronen
3. COMPTON–Effekt
   - Erklärung
   - **Herleitung der Comptonwellenlänge**
4. Welle–Teilchen–Dualismus
   - DE BROGLIE–Wellenlänge
   - Elektronenbeugung
5. **Formulierung und Lösung des “großen Paradoxon”**

Prüfungsfragen zum Kapitel Quantenphysik 1998/1999

1. BOHRsches Atommodell
   - BOHRsche Postulate
   - Mängel / Anwendbarkeit
2. HEISENBERGsche Unschärferelation
3. Wellenmechanisches Atommodell
   - Bedeutung der Quantenzahlen
   - Wesen eines Atoms
4. Spontane und stimulierte Emission von Photonen
5. Laser
   - Physikalisches Prinzip
   - Eigenschaften von Laserstrahlen
   - Anwendungen in der biologischen / medizinischen Forschung