Protokoll O4 — Gitterspektrometer

Till Biskup

Matrikelnummer: 155567

11. Mai 1999

Einführung

Aufgaben

1. Mit Hilfe einer bekannten Hg–Linie ermittle man die Gitterkonstante d.

2. Die Wellenlängen zweier weiterer Hg–Linien und die mittlere Wellenlänge des Na–Dubletts sind zu bestimmen.

3. Man berechne das Auflösungsvermögen des Gitters für verschiedene Ordnungen z nach folgender Gleichung

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = N \cdot z$$

und vergleiche die Werte mit den Beobachtungen bei der Auflösung des Na–Dupletts.

1. Ermittlung der Gitterkonstante d

Die Gitterkonstante d bezeichnet die Periode der parallelen Streifen in einem optischen Beugungsgitter, also deren Abstand voneinander. Um einen möglichst genauen Wert für die Gitterkonstante d zu erhalten — sie spielt in den beiden anderen Aufgaben eine große Rolle, Ungenauigkeiten zögen daher hier unnötige Fehler nach sich —, wurden für zehn Ordnungen z der Hg–Linie der Wellenlänge $\lambda = 546.1nm$ die Winkel φ_z bestimmt und daraus die Differenzwinkel α_z nach der Formel

$$\alpha_z = \varphi_z - \varphi_0 \tag{1}$$

errechnet. φ_z sei der an der Skala des Fernrohres ablesbare Wert in Grad; φ_0 bezeichnet hier den Winkel für die nullte Ordnung, φ_z für die Ordnung z. Die Gitterkonstante d berechnet sich dann nach folgender Formel:

$$d = \frac{z \cdot \lambda}{\sin \alpha_z} \tag{2}$$

Da die Werte für die erste Ordnung sichtlich grobe Fehler — vermutlich durch Verstellen des Fernrohrs zwischen Justierung auf die Spektrallinie und Ablesen des Wertes — aufweisen, wurden sie bei der Mittelwertbildung $\overline{X}$ für die Gitterkonstante d nicht berücksichtigt.

Ordnung		α_z	d
Nr.	φ_z [°]	[°]	$[10^{-9}m]$
0	147,9	0	-
1	150.1	2.2	14225.87
-1	144.8	-3.1	10098.22
2	154.2	6.3	9953.13
-2	141.7	-6.2	10113.02
3	157.3	9.4	10030.86
-3	138.5	-9.4	10030.86
4	160.6	12.7	9936.04
-4	135.3	-12.6	10013.60
5	163.8	15.9	9966.81
-5	132.0	-15.9	9966.81

Ordnung		α_z	d
Nr.	φ_z [°]	[°]	$[10^{-9}m]$
6	167.1	19.2	9963.31
-6	128.8	-19.1	10013.51
7	170.4	22.5	9989.20
-7	125.4	-22.5	9989.20
8	173.9	26	9965.98
-8	121.9	-26	9965.98
9	177.4	29.5	9981.04
-9	118.4	-29.5	9981.04
10	181.0	33.1	9999.96
-10	114.7	-33.2	9973.28
		$\overline{X}$:	9990.76

Fehlerbetrachtung Als mögliche Fehlerquellen treten neben groben Bedienungsfehlern als systematischer Fehler Ungenauigkeiten bei der Einstellung des Fernrohres auf "Unendlich" auf, da im Umfeld des Praktikums nicht unbedingt geeignete Objekte vorhanden waren. So ließ sich durchaus ein Unterschied in der Einstellung erkennen, je nachdem, welcher Punkt am gegenüberliegenden Gebäude fokussiert wurde. Durch die so bedingte Unschärfe kann es zu Differenzen zwischen den gemessenen und tatsächlichen Werten für φ_z und damit letztendlich d kommen.

Die Genauigkeit der Skaleneinstellung des Fernrohres zur Bestimmung des Winkels von $\frac{1}{10}$ Grad beschränkt ihrerseits die Genauigkeit der Meßwerte. Schließlich setzt auch noch die Genauigkeit der angegebenen Wellenlänge auf eine Genauigkeit von $0,1 \cdot 10^{-9}m$ der Genauigkeit des Wertes für die Gitterkonstante d eine Grenze.

Mittelwert:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum d_z = 9.99076 \cdot 10^{-6}m = 9996.76 \cdot 10^{-9}m \tag{3}$$

Standartabweichung:

$$s = \pm\sqrt{\frac{\sum d_z^2}{n-1}} = 40.09 \cdot 10^{-9}m \tag{4}$$

Zufälliger Fehler, hier identisch mit Meßungenauigkeit:

$$u = e_z = \overline{s} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum d_z^2}{(n-1)n}} = 10.02 \cdot 10^{-9}m \tag{5}$$

Endergebnis:

$$d = (9990.76 \cdot 10^{-9} \pm 10.02 \cdot 10^{-9})m \tag{6}$$

2. Bestimmung der Wellenlänge zweier Hg–Linien und der mittleren Wellenlänge des Na–Dubletts

Bestimmt wurden die blaue und die gelbe Hg–Linie sowie die gelbe Natriumlinie. φ_z sei der auf der Skala des Fernrohrs abgelesene Wert in Grad. Der Winkel φ_0 für die nullte Ordnung wurde mangels Meßwert für die Natrium–Linie aus dem Mittelwert der anderen Ordnungen berechnet, stimmt aber mit dem experimentell für die Hg–Linien erhaltenen Wert überein. Die gelbe Hg–Linie stellte sich ab der 2. Ordnung als Doublette dar.

Na–Linie			
Ordnung		α_z	λ
Nr.	φ_z [°]	[°]	[$10^{-9}m$]
0	147.9	0	-
1	151.4	3.5	610.47
-1	149.6	-1.7	296.66
2	154.7	6.8	592.01
-2	141.1	-6.8	592.01
3	158.1	10.2	590.27
-3	137.8	-10.1	584.54
4	161.6	13.7	592.08
-4	134.2	-13.7	592.08

Na–Linie			
Ordnung		α_z	λ
Nr.	φ_z [°]	[°]	[$10^{-9}m$]
5	165.1	17.2	591.40
-5	130.8	-17.1	588.07
6	168.7	20.8	591.83
-6	127.1	-20.8	591.83
7	172.3	24.4	590.14
-7	123.6	-24.3	587.86
8	176.1	28.2	590.67
-8	119.8	-28.1	588.75
		$\overline{X}$:	590.25

blaue Hg–Linie			
Ordnung		α_z	λ
Nr.	φ_z [°]	[°]	[$10^{-9}m$]
0	147.9	0	-
1	150.4	2.5	436.18
-1	145.4	-2.5	436.18
2	153.0	5.1	444.46
-2	142.9	-5	435.77
3	155.5	7.6	440.84
-3	140.4	-7.5	435.08

blaue Hg–Linie			
Ordnung		α_z	λ
Nr.	φ_z [°]	[°]	[$10^{-9}m$]
4	157.9	10	434.11
-4	137.8	-10.1	434.11
5	160.5	12.6	436.28
-5	135.3	-12.6	436.28
6	163.1	15.2	436.97
-6	132.8	-15.1	434.16
		$\overline{X}$:	436.70

gelbe Hg–Linie			
Ordnung		α_z	λ
Nr.	φ_z [°]	[°]	[$10^{-9}m$]
0	147.9	0	-
1	151.2	3.3	575.63
-1	144.6	-3.3	575.63
2	154.5	6.6	574.67
-2	141.3	-6.6	574.67
3	157.9	10	578.81
-3	138.9	-9	521.44

gelbe Hg–Linie			
Ordnung		α_z	λ
Nr.	φ_z [°]	[°]	[$10^{-9}m$]
4	161.3	13.4	579.36
-4	134.5	-13.4	579.36
5	164.7	16.8	578.05
-5	131.1	-16.8	578.05
6	168.2	20.3	578.21
-6	127.6	-20.3	578.21
		$\overline{X}$:	572.67

Aus den für φ_z gemessenen Werten wurde, wie in Aufgabe 1 dargestellt, der Differenzwinkel α_z berechnet. Mit der ebenfalls in Aufgabe 1 berechneten Gitterkonstante d ließ sich mit diesen Werten die Wellenlänge λ nach der Formel

$$\lambda = \frac{d \cdot \sin \alpha_z}{z} \tag{7}$$

errechnen.

Fehlerbetrachtung Für die Messungen gelten grundsätzlich die gleichen Fehler wie in Aufgabe 1, eine weitere Fehlerquelle ist hier, wie schon in Aufgabe 1 angesprochen, die Gitterkonstante d, da deren Wert in Aufgabe 1 experimentell bestimmt wurde und daher mit einem gewissen Fehler behaftet ist.

Als zufälliger Fehler kann ein Verstellen des Fernrohrs zwischen dem Justieren auf die Spektrallinie und dem Ablesen des zugehörigen Wertes φ_z auftreten, systematische Fehler sind eine nicht optimale Einstellung der Entfernung Lampe – Kollimator oder eine Fehlsichtigkeit des Durchführenden. Schätzfehler beim Ablesen der Werte φ_z können bei diesem Experiment nicht auftreten, da die Genauigkeit der Zehntel–Skala an der Fernrohr–Skala nicht überschritten wurde.

Bei der Na–Linie weisen die Werte für die erste Ordnung grobe Fehler auf, weshalb sie nicht in die weitere Berechnung mit eingingen.

Na–Linie

Standartabweichung:

$$s = \pm\sqrt{\frac{\sum d_z^2}{n-1}} = 2.23 \cdot 10^{-9} m \tag{8}$$

Zufälliger Fehler, hier identisch mit Meßungenauigkeit:

$$u = e_z = \overline{s} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum d_z^2}{(n-1)n}} = 0.63 \cdot 10^{-9} m \tag{9}$$

Endergebnis:

$$d = (590.25 \cdot 10^{-9} \pm 0.63 \cdot 10^{-9}) m \tag{10}$$

blaue Hg–Linie

Standartabweichung:

$$s = \pm\sqrt{\frac{\sum d_z^2}{n-1}} = 3.04 \cdot 10^{-9} m \tag{11}$$

Zufälliger Fehler, hier identisch mit Meßungenauigkeit:

$$u = e_z = \overline{s} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum d_z^2}{(n-1)n}} = 0.93 \cdot 10^{-9} m \tag{12}$$

Endergebnis:

$$d = (436.70 \cdot 10^{-9} \pm 0.93 \cdot 10^{-9}) m \tag{13}$$

gelbe Hg–Linie

Standartabweichung:

$$s = \pm\sqrt{\frac{\sum d_z^2}{n-1}} = 16.23 \cdot 10^{-9} m \tag{14}$$

Zufälliger Fehler, hier identisch mit Meßungenauigkeit:

$$u = e_z = \overline{s} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum d_z^2}{(n-1)n}} = 4.97 \cdot 10^{-9} m \tag{15}$$

Endergebnis:

$$d = (572.67 \cdot 10^{-9} \pm 4.97 \cdot 10^{-9}) m \tag{16}$$

3. Berechnung des Gitter–Auflösungsvermögens

Bei der Bestimmung der Wellenlänge der Na–Linie war die Doublette ab der dritten Ordnung zu beobachten. Das Auflösungsvermögen $\frac{\lambda}{\delta\lambda}$ des Gitters, das die spektrale Trennfähigkeit desselben kennzeichnet, berechnet sich wie folgt:

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = N \cdot z \tag{17}$$

In der folgenden Tabelle sind die nach Gleichung (17) errechneten Werte für die ersten vier Ordnungen dargestellt.

Ordnung	$\frac{\lambda}{\delta\lambda}$
1	1000
2	2000
3	3000
4	4000

N berechnet sich aus dem Quotienten der Breite l der ausgeleuchteten Gitterfläche und der Gitterkonstante d.

$$N = \frac{l}{d} \qquad N = \frac{10 \cdot 10^{-3} m}{9.99976 \cdot 10^{-6}} = 1000 \tag{18}$$

$\delta\lambda$ errechnet sich aus dem experimentellen Befund, daß die Doublette ab der dritten Ordnung aufgelöst wurde, zu:

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{N \cdot z} = \frac{590.25 \cdot 10^{-9} m}{1000 \cdot 3} = 0.20 \cdot 10^{-9} m \tag{19}$$

Da der Wert aus Gleichung (19) aber in der Meßungenauigkeit liegt, muß stattdessen die Meßungenauigkeit für die Na–Linie, wie sie in Aufgabe 2 berechnet wurde, in Gleichung (17) einsetzt werden. Daraus ergibt sich ein Auflösungsvermögen $\frac{\lambda}{\delta\lambda}$ von

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{590.25 \cdot 10^{-9} m}{0.63 \cdot 10^{-9} m} = 936.9 \tag{20}$$

Der Vergleich mit der Tabelle zeigt, daß die Doublette demnach rechnerisch schon ab der ersten Ordnung hätte sichtbar sein müssen.

Fehlerbetrachtung Da die Breite l der ausgeleuchteten Gitterfläche mit einem Stück Millimeterpapier experimentell ermittelt wurde, die Na–Lampe allerdings einen relativ diffusen Lichtkegel auf das Papier warf, ist hier mit groben Fehlern im Bereich von Millimetern zu rechnen. Die Konturarmut des Lichtkegels kann eventuell dadurch verursacht worden sein, daß die Na–Lampe nicht nahe genug an den Kollimator herangerückt war.

Wahrscheinlich führte der mangelnde Kontrast, verbunden mit einer nicht einwandfreien Justierung des Fernrohrs auf "Unendlich", dazu, daß die Doublette erst ab der dritten Ordnung in Erscheinung trat. Denn selbst, wenn für die Ermittlung der ausgeleuchteten Gitterbreite mit einem Fehler von $\pm 3 \cdot 10^{-3} m$ gerechnet wird, ergibt sich N zu

$$N = \frac{l}{d} \qquad N = \frac{10 \cdot 10^{-3} m \pm 3 \cdot 10^{-3} m}{9.99976 \cdot 10^{-6}} = 1000 \pm 300 \tag{21}$$

Die Doublette hätte also auch bei Annahme eines solchen Fehlers schon ab der zweiten Ordnung sichtbar sein müssen, denn ein Fehler von annähernd $\pm 10 \cdot 10^{-3} m$, der nötig wäre, um das experimentelle Ergebnis der Sichtbarkeit der Doublette ab der dritten Ordnung rechnerisch zu untermauern, ist trotz der Schwierigkeiten bei der Ermittlung von l sehr unwahrscheinlich.