Protokoll F3 — Fadenpendel

Till Biskup

Matrikelnummer: 155567

18. Mai 1999

Einführung

Mit einem im Schwerefeld der Erde schwingenden Fadenpendel läßt sich der Wert für die Gravitationsbeschleunigung g mit folgender Formel bestimmen:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Dabei wird ausgenutzt, daß auf den Körper ständig die konstante Kraft $\vec{F}_G = m\vec{g}$ wirkt, durch deren Komponente senkrecht zur Erdoberfläche man durch Anwendung der newtonschen Bewegungsgleichung und der Näherung, daß für kleine Winkel $\sin(\varphi) \approx \varphi$ die obige Gleichung erhält.

Aufgaben

1. Bestimmung der Periodendauer für eine feste Fadenlänge. Die Zeitmessung erfolgt für 10 Schwingungen je 10 mal an einem Umkehrpunk und beim Nulldurchgang des Pendels. Berechnung des Mittelwertes, der Standardabweichung und des Vertrauensbereiches der Periodendauer und Diskussion der Unterschiede.

2. Beim Nulldurchgang wird zehnmal die Periodendauer für 1 Schwingung bestimmt und die Standardabweichung ermittelt. Vergleich mit dem Wert aus Aufgabe 1 und Diskussion der Unterschiede.

3. Bestimmung der Periodendauer für 10 verschiedene Fadenlängen l (500 mm $\leq l \leq$ 1000 mm). Aus je 2 Messungen für 10 Schwingungen bestimme man die Mittelwerte für die Periodendauern T_i.

4. Berechnung der Fallbeschleunigung g und der Anfangslänge l_0 durch grafischen und rechnerischen Geradenausgleich.

   $$T_i^2 = \frac{4\pi^2}{g} l_0 - \frac{4\pi^2}{g} l_i$$

5. Abschätzung der systematischen Fehler für die Periodendauer nach der Gleichung

   $$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \cdot \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} \cdots \right\}$$

   für die konkreten Versuchsbedingungen.

1. Bestimmung der Periodendauer für 10 Schwingungen

am Umkehrpunkt	am Nulldurchgang
$\overline{x} = 20.45\ s$	$\overline{x} = 20.45\ s$
$S = 3.9 \cdot 10^{-2}\ s$	$S = 3.9 \cdot 10^{-2}\ s$
$\overline{S} = 1.2 \cdot 10^{-2}\ s$	$\overline{S} = 1.2 \cdot 10^{-2}\ s$
$\overline{T}_U = (2.045 \pm 1.2 \cdot 10^{-2})\ s$	$\overline{T}_N = (2.045 \pm 1.2 \cdot 10^{-2})\ s$

Diskussion der Unterschiede Der normalerweise auftretende Unterschied in der Genauigkeit der beiden Meßmethoden zugunsten der Messung beim Nulldurchgang läßt sich dadurch erklären, daß das Pendel im Nullpunkt seine höchste Geschwindigkeit hat, und es demzufolge sehr schnell durch diesen Punkt hindurch läuft. Die Geschwindigkeit an den Umkehrpunkten ist hingegen Null und in der näheren Umgebung nahe Null ($v_U \ll v_N$). Das Pendel hält sich dort also länger auf, was die Zeitmessung am Umkehrpunkt erschwert, da der wirkliche Umkehrpunkt nur schwer feststellbar ist.

2. Bestimmung der Periodendauer für eine Schwingung

$\overline{x} = 2.07\ s$ $\qquad S = 5.3 \cdot 10^{-2}\ s$ $\qquad \overline{T} = (2.07 \pm 0.05)\ s$

Diskussion der Unterschiede Der Unterschied der Standardabweichung zu den Werten aus Aufgabe 1 entsteht dadurch, daß bei der Messung über 10 Perioden der zufällige Fehler der Zeitnahme genau so hoch ist, wie bei der Messung nur einer Periode. Da aber in Aufgabe 1 die gemessene Zeit durch 10 dividiert wird, um die Periodendauer auszurechnen, verringert sich gleichzeitig der Einfluß des zufälligen Fehlers bei der Zeitmessung um den Faktor 10.

3. Bestimmung der Periodendauer für unterschiedliche Fadenlängen

$\Delta l\ [m]$	0.04	0.08	0.12	0.16	0.20	0.24	0.28	0.32	0.36	0.40
$\overline{T_i}\ [s]$	2.009	1.963	1.921	1.879	1.830	1.788	1.742	1.691	1.644	1.607
$\overline{T_i}^2\ [s^2]$	4.034	3.853	3.688	3.531	3.347	3.195	3.033	2.859	2.703	2.582

4. Berechnung der Fallbeschleunigung g und der Anfangslänge l_0

Rechnerischer Geradenausgleich:

$$a = (4.077\ \pm\ 0.045)\ s^2 \cdot m^{-1} \qquad b = (4.179\ \pm\ 0.011)\ s^2$$

$$a = \frac{T_1^2 - T_2^2}{l_2 - l_1} \quad [s^2 \cdot m^{-1}] \qquad b = T_0^2 \quad [s^2]$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \rightarrow \quad g = -\frac{4\pi^2}{a} = 9.683\ m \cdot s^{-2}$$

$$u_g = \left|\frac{dg(a)}{da} \cdot u_a\right| = \frac{4\pi^2}{a^2} \cdot 4.5 \cdot 10^{-2}\ m \cdot s^{-2} = 0.11\ m \cdot s^{-2}$$

$$g = (9.68 \pm 0.11)\ m \cdot s^{-2}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \rightarrow \quad l_0 = \frac{gT_0^2}{4\pi^2} \qquad l_0 = \left|\frac{4\pi^2 b}{4\pi^2 a}\right| = \left|\frac{b}{a}\right| = 1.025\ m$$

$$u_{l_0} = \sqrt{\left(\frac{\partial l_0(a,b)}{\partial a}\cdot u_a\right)^2 + \left(\frac{\partial l_0(a,b)}{\partial b}\cdot u_b\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{b}{a^2}\cdot u_a\right)^2 + \left(\frac{1}{a}\cdot u_b\right)^2}$$
$$= \sqrt{(1.13\cdot 10^{-2}m)^2 + (-2.7\cdot 10^{-3}m)^2} = 1.16\cdot 10^{-2}\ m$$

$$l_0 = (1.025\ \pm\ 0.012)\ m$$

Der Wert für g weicht beim rechnerischen Geradenausgleich etwas vom Tafelwert ab. Zwar kann der systematische Restfehler der Stoppuhr nicht für eine Korrektur herangezogen werden, da er mit 0.01 s viel zu klein ist, er wird aber ohnehin vom Fehler bei der Zeitnahme beim Nulldurchgang des Pendels weit übertroffen, der im Bereich von geschätzt $\frac{1}{4}s$ liegt.

Grafischer Geradenausgleich:

$$a = \frac{T_1^2 - T_2^2}{l_2 - l_1} = \frac{4\pi^2}{g} \qquad a = \frac{4.013 - 3.850}{0.04m} = 4.075\ s^2\cdot m^{-1}$$
$$g = \frac{4\pi^2}{a} = 9.688\ m\cdot s^{-2}$$
$$l_0 = 1.0125\ m$$

Da der Graph mit einer Genauigkeit von etwa 0.5 mm in der Darstellung abgelesen werden kann, ergibt sich daraus für die Werte T_1^2 und T_2^2 eine Genauigkeit von 0.125 s^2. Daraus folgt für a und g

$$a = (4.075\ \pm\ 0.125)\ s^2\cdot m^{-1}$$
$$g = (9.688\ \pm\ 0.125)\ m\cdot s^{-2}$$

Für die Länge des Pendels ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Wert des rechnerischen Geradenausgleichs, der Tafelwert für g liegt beim graphischen Geradenausgleich sogar innerhalb der Meßungenauigkeit.

5. Abschätzung der systematischen Fehler für die Periodendauer

Da das im Versuch benutzte Pendel bei einer Länge $l \approx$ 1m eine maximale Auslenkung S um etwa 10 cm zuläßt, errechnet sich der Auslenkwinkel $\varphi_{\max}$ im Bogenmaß zu

$$\varphi_{\max} = \arctan\left(\frac{S}{l}\right) = \arctan\left(\frac{0.1m}{1m}\right) = 0.09967 < 0.1$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in untere Gleichung erhält man die Dimension des systematischen Fehlers.

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\cdot\sin^4\frac{\varphi_0}{2}\cdots\right\}$$
$$T_1 - T \approx 6.2\cdot 10^{-4}$$

Da sich der systematische Fehler, der sich aus der Näherung $\sin\varphi = \varphi$ für das mathematische Pendel ergibt, in der Größenordung von 10^{-4} bewegt, hat er nur einen sehr geringen Einfluß auf die Bestimmung von g gegenüber den zufälligen Fehlern. Daran ändert auch die Tatsache nichts, daß die Werte für Pendellänge und Auslenkung nur relativ grobe Schätzungen sind.