Protokoll F1 — Fehlerverteilung

Till Biskup
Matrikelnummer: 155567

27. April 1999

Einführung

Aufgabe des Beobachters war, auf einer Skale die Stellung einer Marke mit einer Genauigkeit von 0.01 des Teilstrichabstands zu schätzen. Der Versuch stellt eindrücklich dar, wie sehr das menschliche Schätzvermögen mit Fehlern behaftet ist und ist daher gut geeignet, die Wichtigkeit genauer Messungen und vor allem der Angabe des jeweils vorliegenden Fehlers zu demonstrieren.

Aufgaben

1. *Ermittlung der Stichprobe:* 50 Schätzwerte x_i der Stellung einer Marke und die zugehörigen wahren Werte x_{wi} werden notiert.

2. Berechnung der scheinbaren Fehler $v_i = x_i -_{wi}$.

3. *Vorzeichentest:* Man bestimme die Zahl n^+ der positiven und die Zahl n^- der negativen Fehler v_i. Da die Fehler v_i bei Annahme einer Normalverteilung symmetrisch zum Wert $v_i = 0$ liegen, müssen die Zahlen n^+ und n^- annähernd gleich groß sein. Wenn n die Zahl aller Meßwerte ist, muß für den positiven Ausgang des Vorzeichentests

   $$|n^+ - n^-| \leq \sqrt{n}$$

   erfüllt sein; $\pm\sqrt{n}$ ist die zu erwartende statistische Schwankung bei einer Stichprobe vom Umfang n.

4. Für die weitere Auswertung der Meßergebnisse empfiehlt sich eine Tabelle, in der die scheinbaren Fehler ihrer Größe nach geordnet werden. In dieser Tabelle werden die Meßergebnisse von Aufgabe 1 übertragen, indem man sie der Reihe nach durchgeht und bei dem entsprechenden v_j in der Spalte "Strichliste" durch einen Strich markiert. Die Zahl der Striche ergibt dann die absolute Häufigkeit $k(v_j)$.

5. Aus den Fehlern v_i wird die Standartabweichung

   $$s = \pm\sqrt{\frac{1}{n}\sum_i v_i^2} = \pm\sqrt{\frac{1}{n}\sum_i k(v_j)v_j^2}$$

   berechnet, die eine Näherung für die Standartabweichung σ der Normalverteilung darstellt. Im Nenner tritt n anstelle von $(n-1)$ auf, weil bei diesem Versuch ausnahmsweise der wahre Wert der Meßgröße bekannt ist.

6. Die ermittelten relativen Häufigkeiten $h(v_j) = k(v_j)/n$ der Fehler v_j werden graphisch als Funktion von v_j dargestellt. Durch diese Punkte versuche man nach Augenmaß eine Normalverteilungskurve zu legen.

7. Mit den relativen Häufigkeiten aus Aufgabe 6 berechne man die Summenhäufigkeit

$$H(v_j) = \sum_{v_k \leq v_j} h(v_k)$$

und stelle diese Summenhäufigkeit $H(v_j)$ graphisch als Funktion von v_j auf Millimeterpapier dar.

8. *Test mit Wahrscheinlichkeitspapier:* Die Wertepaare der Summenhäufigkeitskurve (Aufgabe 7) übertrage man außerdem auf Wahrscheinlichkeitspapier und lege durch die Punkte im mittleren Bereich eine ausgleichende Gerade.

9. Man entnehme der Darstellung auf Wahrscheinlichkeitspapier (Aufgabe 8) bei den Werten $H(v') = 0.16$ (bzw. 16%) und $H(v'') = 0.84$ (bzw. 84%) die zugehörigen Werte v' und v'' und vergleiche $(v'' - v')/2$ mit dem Wert der empirischen Standartabweichung (Aufgabe 5).

1. Ermittlung der Stichprobe

siehe Meßprotokoll

2. Berechnung der scheinbaren Fehler v_i

siehe Meßprotokoll

3. Vorzeichentest

$$n^+ = 31 \qquad n^- = 13$$
$$|n^+ - n^-| = 18 > \sqrt{50} \approx 7.07 \quad (!)$$

Da, wie die Berechnung ergab, der Betrag der Differenz der positiven und negativen Fehler um mehr als das zweieinhalbfache größer ist als die Wurzel der Anzahl der Versuche, kann bei dem vorliegenden Ergebnis nicht mehr von einer Normalverteilung der Fehler ausgegangen werden.

4. Tabelle zur Auswertung der Meßergebnisse

v_j	v_j^2	Strichliste	$k(v_j)$	$k(v_j) \cdot v_j^2$	$h(v_j)$	$H(v_j)$
-0.06	0.0036	$\vert$	1	0.0036	0.02	0.02
-0.05	0.0025	$\vert$	1	0.0025	0.02	0.04
-0.03	0.0009	$\vert\vert\vert\vert\vert\ \ \vert$	6	0.0054	0.12	0.16
-0.01	0.0001	$\vert\vert\vert\vert\vert\ \ \vert$	6	0.0006	0.12	0.28
0	0	$\vert\vert\vert\vert\vert\ \ \vert$	6	0	0.12	0.40
0.01	0.0001	$\vert\vert\vert\vert\vert\ \ \vert\vert$	7	0.0007	0.14	0.54
0.02	0.0004	$\vert\vert\vert$	3	0.0012	0.06	0.60
0.03	0.0009	$\vert\vert\vert\vert\vert\ \ \vert\vert\vert\vert$	9	0.0081	0.18	0.78
0.04	0.0016	$\vert\vert\vert$	3	0.0048	0.06	0.84
0.05	0.0025	$\vert\vert$	2	0.005	0.04	0.88
0.06	0.0036	$\vert\vert\vert\vert\vert$	5	0.018	0.1	0.98
0.07	0.0049	$\vert$	1	0.0049	0.02	1

5. Berechnung der Standartabweichung s

Die Standartabweichung kennzeichnet die Streuung der Meßwerte um den Mittelwert und damit die Genauigkeit der Meßmethode.

$$s = \pm\sqrt{\frac{1}{n}\sum_i v_i^2} = \pm\sqrt{\frac{1}{n}\sum_j k(v_j)v_j^2}$$

$$s = \pm\, 0.0331$$

6. Graphische Darstellung der relativen Häufigkeiten

vergleiche beiliegenden Graphen

Das Einzeichnen der Normalverteilungskurve gestaltete sich schwierig, da zum einen die Streuung der Meßwerte sehr hoch ist, zum anderen im Bereich negativer Werte von v_j zwei Werte, nämlich -0.04 und -0.02, gar nicht als Abweichungen auftraten.

Aufgaben 7 und 8

vergleiche Tabelle Aufgabe 4 und beiliegende Graphen

9. Vergleich der empirischen Standartabweichung mit der Darstellung auf Wahrscheinlichkeitspapier

Die auf dem Wahrscheinlichkeitspapier eingezeichnete ausgleichende Gerade ermöglichte es, Werte der scheinbaren Fehler v' für eine Summenhäufigkeit $H(v') = 0.16$ und v'' für $H(v') = 0.84$ zu entnehmen.

$$H(v') = 0.16 \qquad v' = -0.025$$
$$H(v'') = 0.84 \qquad v'' = 0.034$$
$$\frac{v'' - v'}{2} = 0.0295 \qquad s = 0.0331$$

Der Vergleich der halbierten Differenz dieser beiden Werte mit der in Aufgabe 5 berechneten Standartabweichung ergab eine relativ gute Übereinstimmung mit dieser.

Fehlerbetrachtung

Als systematischer Fehler kommen bei diesem Versuch nur Einflüsse durch die Optik in Frage, z. B. durch eine perspektivische Verkürzung der an die Wand projizierten Skala oder Sehschwäche des Durchführenden, eventuell wäre noch ein fehlerhaftes Lineal bei der Erstellung der Skalen in Betracht zu ziehen. Ein Verrutschen des Assistenten in der Zeile der wahren Meßwerte kommt schon dadurch nicht als systematischer Fehler in Betracht, da er durch die Verteilung der Meßwerte über eine Skala von 1 bis 5 sehr schnell aufgefallen wäre. Ein solcher Fehler wäre nur als zufälliger Fehler innerhalb eines engen Bereichs der Meßwerte zu diskutieren.

Als zufällige und damit nicht beeinflußbare Fehler kommen der gegen Ende des Versuchs herrschende Zeitdruck sowie die steigende Ungeduld seitens der Versuchspersonen in Betracht.

Der Vertrauensbereich $\overline{s}$ ergibt sich für diesen Versuch mit n Messungen anhand der berechneten Standartabweichung s zu einem Wert von

$$\overline{s} = \pm t \frac{s}{\sqrt{n}} \approx 0.0047,$$

die Meßunsicherheit u zu

$$u = s + \overline{s} = 0.0378.$$

Das Endergebnis wäre demnach wie folgt anzugeben:

$$x_i \pm 0.038$$

Der Fehler dieser Schätzung auf eine Genauigkeit des 0.01–fachen des Teilstriches lag also bei diesem Versuch im Mittel bei drei Hundertsteln, also bei dem Dreifachen der geforderten Genauigkeit.